

Was bisher geschah

- ▶ Inhalt und Organisation der Lehrveranstaltung
- ▶ Modellierung:
 - ▶ Diagramm: Realität – (formales) Modell (Aufgabe, Kontext, Lösung)
 - ▶ Einordnung in Prozess zur (maschinellen) Lösung von Aufgaben
 - ▶ Syntax und Semantik formaler Darstellungen
- ▶ Beispiel Münzenspiel: Modellierung von
 - ▶ Daten: Spielzustände
 - ▶ Abläufen:
 - ▶ Spielzug (Zustandsübergang)
 - ▶ graphische Darstellung gesamter Spiele
 - ▶ Eigenschaften: Endzustände (ohne Zugmöglichkeit)
- ▶ (klassische) Aussagenlogik

WH: Aussagenlogik

- ▶ Aussage = Behauptung
- ▶ Aussagenvariablen p (Syntax)
- ▶ klassische Logik: Wahrheitswerte $W(p) \in \{0, 1\}$ (Semantik)
- ▶ Kombination von Formeln durch Junktoren (Syntax)
- ▶ Wahrheitswert einer zusammengesetzten Formel wird aus Wahrheitswerten der Teilformeln berechnet. (Semantik)

		Syntax	Semantik
	Stelligkeit	Symbol	Wahrheitswertfunktion
wahr	0	$\top$	1
falsch	0	$\bot$	0
Konjunktion	2	$\wedge$	min
Disjunktion	2	$\vee$	max
Negation	1	$\neg$	$x \mapsto 1 - x$
Implikation	2	$\rightarrow$	$\leq$
Äquivalenz	2	$\leftrightarrow$	$=$

Modellierung in Aussagenlogik (Beispiele)

- ▶ Wenn Leo ein Bier bestellt, bestellt auch Mark eins.

Aussagen:

- ▶ Leo bestellt Bier.
- ▶ Mark bestellt Bier.

Aussagenvariablen:

- ▶ lb - Leo bestellt Bier.
- ▶ mb - Mark bestellt Bier.

Formel: $lb \rightarrow mb$

- ▶ Leo und Mark bestellen nie zugleich Bier.

Formel: $\neg(lb \wedge mb)$

- ▶ Mark bestellt höchstens dann Bier, wenn Leo Bier bestellt.

Formel: $\neg lb \rightarrow \neg mb$

- ▶ Wenn es morgens vor 7 oder abends nach 7 ist, ist es dunkel.

Aussagenvariablen:

- ▶ m - Es ist morgens vor 7.
- ▶ a - Es ist abends nach 7.
- ▶ d - Es ist dunkel.

Formel: $(m \vee a) \rightarrow d$

- ▶ Morgens vor 7 und abends nach 7 ist es dunkel.

Formel: $(m \rightarrow d) \wedge (a \rightarrow d)$

Aussagenlogische Formeln (Syntax)

Junktoren z.B. $\top, \bot$ (nullstellig), $\neg$ (einstellig),
 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (zweistellig)

Aussagenvariablen (Atome), z.B. $p, q, r, s, \dots$ oder $p_1, p_2, \dots$

Definition (induktiv)

Die Menge $AL(P)$ aller **aussagenlogischen Formeln** mit Aussagenvariablen aus der Menge P ist definiert durch:

IA: Alle Aussagenvariablen $p \in P$ sind Formeln. ($P \subseteq AL(P)$).

- IS:**
- ▶ $\top$ und $\bot$ sind Formeln.
 - ▶ Ist φ eine Formel, dann ist auch $\neg\varphi$ eine Formel.
 - ▶ Sind φ und ψ Formeln, dann sind auch $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$ Formeln.

IS': (Verallgemeinerung aller Unterpunkte zu IS)

Sind j ein n -stelliger Junktor und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Formeln, dann ist auch $j(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Formel.

(Aus $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq AL(P)$ folgt $j(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in AL(P)$.)

Aussagenlogische Formeln (Beispiele)

Junktoren der klassischen Aussagenlogik: $\{\top, \text{f}, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

kürzere Notation:

ohne äußere Klammern und Klammern um $\neg\varphi$

Beispiele:

$\top \wedge (\neg\top)$	Formel ohne Aussagenvariablen ($\in \text{AL}(\emptyset)$)
$\neg\neg\neg p$	Formel mit Aussagenvariable p ($\in \text{AL}(\{p\})$)
$\wedge(p \vee q)$	keine Formel (syntaktisch unkorrekt) ($\notin \text{AL}(P)$)
$\neg(p \rightarrow q)$	Formel mit Aussagenvariablen p, q ($\in \text{AL}(\{p, q\})$)
$\rightarrow q$	keine Formel (syntaktisch unkorrekt) ($\notin \text{AL}(P)$)

Baumstruktur (analog arithmetischen Termen)

Beispiel:

$$\varphi = ((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \vee (p \leftrightarrow q))) \quad \in \text{AL}(\{p, q, r\})$$

Menge aller Aussagenvariablen einer Formel

Definition (induktiv):

Für jede aussagenlogische Formel $\varphi \in AL(P)$ ist die Menge $\text{var}(\varphi)$ aller in φ vorkommenden Aussagenvariablen definiert durch:

IA: falls $\varphi = p$ (Atom), dann $\text{var}(\varphi) = \{p\}$

IS: ▶ nullstellige Junktoren ($\top, \bot$):

für $\varphi = \top$ oder $\varphi = \bot$ gilt $\text{var}(\varphi) = \emptyset$

▶ einstellige Junktoren ($\neg$):

für $\varphi = \neg\varphi_1$ gilt $\text{var}(\varphi) = \text{var}(\varphi_1)$

▶ zweistellige Junktoren ($* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

für $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ gilt $\text{var}(\varphi) = \text{var}(\varphi_1) \cup \text{var}(\varphi_2)$

Beispiel:

Für $\varphi = p \rightarrow ((q \leftrightarrow \top) \vee (r \rightarrow q))$ gilt $\text{var}(\varphi) = \{p, q, r\}$

Anzahl der Variablenvorkommen in einer Formel

Definition (induktiv):

Für jede aussagenlogische Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ ist die Anzahl von Variablenvorkommen $\text{varcount}(\varphi)$ definiert durch:

IA: falls $\varphi = p$ (Atom), dann $\text{varcount}(\varphi) = 1$

IS: ▶ nullstellige Junktoren ($\top, \bot$):

$$\text{varcount}(\top) = \text{varcount}(\bot) = 0$$

▶ einstellige Junktoren ($\neg$):

$$\text{varcount}(\neg\varphi) = \text{varcount}(\varphi)$$

▶ zweistellige Junktoren ($*$ $\in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

$$\text{varcount}(\varphi * \psi) = \text{varcount}(\varphi) + \text{varcount}(\psi)$$

Beispiel:

$\varphi = p \rightarrow ((q \leftrightarrow \top) \vee (r \rightarrow q))$ gilt $\text{varcount}(\varphi) = 4$

$\text{varcount}(\varphi)$ ist die Anzahl aller mit Variablen markierten Blätter im Formelbaum von φ

Allgemein gilt $\text{varcount}(\varphi) \geq |\text{var}(\varphi)|$

Menge aller Teilformeln einer Formel

Definition (induktiv):

Für jede aussagenlogische Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ ist die Menge $\text{TF}(\varphi)$ aller in φ vorkommenden **Teilformeln** definiert durch:

IA: falls $\varphi = p$ (Atom), dann $\text{TF}(\varphi) = \{p\}$

IS: ► nullstellige Junktoren ($\top, \bot$):

für $\varphi = \top$ oder $\varphi = \bot$ gilt $\text{TF}(\varphi) = \{\varphi\}$

► einstellige Junktoren ($\neg$):

für $\varphi = \neg\varphi_1$ gilt $\text{TF}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \text{TF}(\varphi_1)$

► zweistellige Junktoren ($* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

für $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ gilt $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$\text{TF}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \text{TF}(\varphi_1) \cup \text{TF}(\varphi_2)$

Beispiel:

Für $\varphi = p \rightarrow ((q \leftrightarrow \top) \vee (r \rightarrow q))$ gilt

$$\text{TF}(\varphi) = \left\{ p \rightarrow ((q \leftrightarrow \top) \vee (r \rightarrow q)), p, (q \leftrightarrow \top) \vee (r \rightarrow q), \right. \\ \left. q \leftrightarrow \top, r \rightarrow q, q, \top, r \right\}$$

Prinzip der strukturellen Induktion

Beobachtung:

Bestimmung von Variablenmenge, Größe, Menge der Teilformeln einer aussagenlogischen Formel geschah nach demselben Schema:

Definition einer Funktion $f : AL(P) \rightarrow X$ durch

Induktion über die Struktur der Formel

Für jede aussagenlogische Formel $\varphi \in AL(P)$ ist der Funktionswert $f(\varphi)$ definiert durch:

IA: Definition des Funktionswertes $f(\varphi)$ für **Atome** $\varphi = p$
(Blätter im Formelbaum)

IS: Definition des Funktionswertes $f(\varphi)$ für **zusammengesetzte** Formeln φ durch die Funktionswerte der **Teilformeln** von φ

Aussagenlogische Interpretationen (Semantik)

(Belegungen der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten)

Interpretation (Belegung) für Formeln $\varphi \in \text{AL}(P)$:
ordnet jeder Aussagenvariable in P einen Wahrheitswert zu,
ist eine Funktion $W : P \longrightarrow \{0, 1\}$
(eine Zeile in der WW-Tabelle für φ)

Beispiel: $P = \{p, q\}$ und W_{10} mit $W_{10}(p) = 1$ und $W_{10}(q) = 0$

Wahrheitswerte für Formeln

Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ fortgesetzt zu Funktion $W : \mathbf{AL}(P) \rightarrow \{0, 1\}$

Der Wert $W(\varphi)$ der Formel φ in der Interpretation W wird **induktiv** mit den Wahrheitswertfunktionen der Junktoren

aus den Werten der Teilformeln von φ bestimmt:

IA: falls $\varphi = p$ (Atom), dann $W(\varphi) = W(p)$

IS: ▶ nullstellige Junktoren $\mathbb{t}, \mathbb{f}$: $W(\mathbb{t}) = 1$, $W(\mathbb{f}) = 0$

▶ einstelliger Junktor $\neg$:

für $\varphi = \neg\psi$ gilt $W(\neg\psi) = \llbracket \neg \rrbracket W(\psi) = 1 - W(\psi)$

▶ zweistellige Junktoren $*$ $\in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

$$W(\psi_1 \wedge \psi_2) = W(\psi_1) \llbracket \wedge \rrbracket W(\psi_2) = \min(W(\psi_1), W(\psi_2))$$

$$W(\psi_1 \vee \psi_2) = W(\psi_1) \llbracket \vee \rrbracket W(\psi_2) = \max(W(\psi_1), W(\psi_2))$$

$$W(\psi_1 \rightarrow \psi_2) = W(\psi_1) \llbracket \rightarrow \rrbracket W(\psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } W(\psi_1) \leq W(\psi_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$W(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) = W(\psi_1) \llbracket \leftrightarrow \rrbracket W(\psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } W(\psi_1) = W(\psi_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: $\varphi = ((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \vee (p \leftrightarrow q)))$

$W_{010}(p) = 0$, $W_{010}(q) = 1$, $W_{010}(r) = 0$, $W_{010}(\varphi) = \dots$

Wahrheitstabelle

Darstellung der Werte einer Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ in
allen möglichen Interpretationen $W \in \mathbb{W}(P)$ in einer Tabelle

Jede Zeile repräsentiert eine Interpretation $W : \text{var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$

$W(p_1)$	$W(p_2)$	$\dots$	$W(p_{n-1})$	$W(p_n)$	$W(\varphi)$
0	0	$\dots$	0	0	
0	0	$\dots$	0	1	
		$\vdots$			
1	1	$\dots$	1	1	

Beispiel: $((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \vee (p \leftrightarrow q)))$

Wahrheitstabelle von Formeln φ mit n Aussagenvariablen
sind Wertetabellen n -stelliger Boolescher Funktionen
 $f_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Die Semantik jeder aussagenlogischen Formel φ mit n
Aussagenvariablen ist eine n -stellige Boolesche Funktion.

Modelle aussagenlogischer Formeln

Die Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ der Aussagenvariablen in P **erfüllt** die Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ (ist ein **Modell** von φ) genau dann, wenn $W(\varphi) = 1$.

Beispiel:

Modelle (erfüllende Belegungen) der Formel

$$\varphi = p \vee (q \wedge \neg p) \in \text{AL}(\{p, q\})$$

- ▶ Belegung $W_{10} : \{p, q\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $W_{10}(p) = 1$ und $W_{10}(q) = 0$ ist ein **Modell** für φ , weil $W_{10}(\varphi) = 1$.
- ▶ Belegung $W_{00} : \{p, q\} \rightarrow \{0, 1\}$ ist **kein Modell** für φ , weil $W_{00}(\varphi) = 0$.
- ▶ W_{01} mit $W_{01}(p) = 0$ und $W_{01}(q) = 1$ ist ein Modell für φ ,
- ▶ W_{11} mit $W_{11}(p) = 1$ und $W_{11}(q) = 1$ ist ein Modell für φ .

Modellmengen aussagenlogischer Formeln

Modellmenge (Menge aller Modelle) der Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$:

$$\text{Mod}(\varphi) = \{W : P \rightarrow \{0, 1\} \mid W(\varphi) = 1\}$$

(Diese Darstellung ist oft kürzer als die WW-Tabelle)

Beispiele:

- ▶ $\text{Mod}(p \vee (q \wedge \neg p)) = \{W_{10}, W_{01}, W_{11}\},$
- ▶ $\text{Mod}(p \rightarrow p) = \{W_0, W_1\} = \{W : \{p\} \rightarrow \{0, 1\}\}$
(alle möglichen Belegungen für p),
- ▶ $\text{Mod}(p \wedge \neg p) = \emptyset$