Prof. Dr. Sibylle Schwarz, HTWK Leipzig, FIM sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

4. Übung im Modul „Modellierung“ Wintersemester 2026/27

zu lösen bis 4. November 2026

Aufgabe 4.1

Transformieren Sie die folgenden Formeln φ_i jeweils in

a. eine äquivalente Formel in DNF,

b. eine äquivalente Formel in CNF.

$$\varphi_1 = \neg((p \to (q \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r)))$$
$$\varphi_2 = (p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$$

Aufgabe 4.2

a. Finden Sie eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(\{p, q, r\})$ und

b. eine aussagenlogische Formel $\psi \in \mathsf{AL}(\{p, q, r\})$ in CNF

mit der Modellmenge $\mathsf{Mod}(\varphi) = \mathsf{Mod}(\psi) = \{W_{011}, W_{100}, W_{101}, W_{111}\}$.

Aufgabe 4.3

In dieser Aufgabe geht es um aussagenlogische Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}(P)$, in denen ausschließlich Aussagenvariablen und Junktoren aus der Menge $\{\vee, \wedge\}$ vorkommen.

a. Definieren Sie die Menge $\mathsf{AL}_{\{\vee,\wedge\}}(P)$ dieser eingeschränkten Formeln induktiv.
(Diese Menge ist für jede nichtleere Menge P unendlich.)

b. Geben Sie drei Formeln $\varphi, \psi, \eta \in \mathsf{AL}_{\{\vee,\wedge\}}(\{p, q, r\})$ an mit $\text{size}(\varphi) = 1$, $\text{size}(\psi) = 5$ und $\text{size}(\eta) = 11$.

c. Geben Sie zu jeder Menge P von Aussagenvariablen eine Belegung $W : P \to \{0, 1\}$ an, die *jede* Formel $\varphi \in \mathsf{AL}_{\{\vee,\wedge\}}(P)$ erfüllt.

d. Weisen Sie mit Hilfe dieser Belegung W durch strukturelle Induktion nach, dass jede Formel in $\varphi \in \mathsf{AL}_{\{\vee,\wedge\}}(P)$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4.4

Welche der folgenden Aussagen gelten:

a.
$$\mathsf{Mod}((p \to \neg q) \wedge (p \vee q)) \subseteq \mathsf{Mod}((p \wedge \neg p) \wedge q)$$
$$\mathsf{Mod}((p \wedge q) \wedge (p \to \neg q) \wedge (p \vee q)) \subseteq \mathsf{Mod}((p \wedge \neg p) \wedge q)$$

b.
$$\{p \to \neg q, p \vee q\} \models (p \wedge \neg p) \wedge q$$
$$\{p \wedge q, p \to \neg q, p \vee q\} \models (p \wedge \neg p) \wedge q$$

Aufgabe 4.5

Gegeben ist die Formelmenge $\Phi = \{\neg(a \wedge \neg b), \neg b \vee c\}$

a. Welche der folgenden Formeln sind semantische Folgerungen aus Φ?

   (1) $\neg(a \wedge b)$ (2) $\neg a \vee c$

b. Geben Sie eine Formel ψ an, die die Aussagenvariable c nicht enthält, so dass die Formel c eine semantische Folgerung aus der Formelmenge $\Phi \cup \{\psi\}$ ist.

c. Geben Sie eine Formel φ an, so dass die Formelmenge $\Phi \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 4.6

a. Geben Sie für $P = \{p, q, r, s\}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(P)$ an, die genau von allen Belegungen erfüllt wird, unter denen mindestens zwei der Atome falsch sind.

b. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ in DNF an.

c. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\eta \in \mathsf{AL}(P)$ in CNF an.