Prof. Dr. Sibylle Schwarz, HTWK Leipzig, FIM sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

4. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität
Wintersemester 2026/27 zu lösen bis 12. November 2026

Aufgabe 4.1:

Für welche Konfigurationen s eines while-Programms gilt (jeweils mit Herleitung)

1. $((1,2),s) \in \text{sem}_{\mathsf{Skip}}$
2. $((1,2),s) \in \text{sem}_{\mathsf{Dec}\,1}$
3. $(s,(1,2)) \in \text{sem}_{\mathsf{Dec}\,1}$
4. $((1,2),s) \in \text{sem}_{\mathsf{Seq}(\mathsf{Dec}\,1,\mathsf{Inc}\,0)}$
5. $(s,(1,2)) \in \text{sem}_{\mathsf{Seq}(\mathsf{Dec}\,1,\mathsf{Inc}\,0)}$
6. $((1,2),s) \in \text{sem}_{\mathsf{IfZ}(1,\mathsf{Seq}(\mathsf{Dec}\,1,\mathsf{Inc}\,0),\mathsf{Seq}(\mathsf{Dec}\,0,\mathsf{Inc}\,1))}$
7. $((1,2),s) \in \text{sem}_{\mathsf{While}(1,\mathsf{Seq}(\mathsf{Dec}\,1,\mathsf{Inc}\,0))}$

Aufgabe 4.2:

Zeigen Sie

1. $\mathsf{IfZ}(i,p,\mathsf{Seq}(p,q)) \equiv \mathsf{Seq}(p,\mathsf{IfZ}(i,\mathsf{Skip},q))$ für alle Programme p, die $s(i)$ nicht ändern (Begründen Sie die Notwendigkeit dieser Einschränkung.)
2. $\mathsf{Seq}(p,q) \not\equiv \mathsf{Seq}(q,p)$

Aufgabe 4.3:

Geben Sie While-Programme zur Berechnung der folgenden Anweisungen (Unterprogramme) an:

1. Zuweisung `i := s(j)`
2. Verzweigung `if (s(i) = s(j)) p else q`

Geben Sie dazu zunächst jeweils die Semantik der Kurzformen in der Aufgabenstellung an (also $\text{sem}_{i:=s(j)} = \ldots$ usw).
Zeigen Sie, dass Ihre Unterprogramme die gewünschte Semantik haben und die Ersetzung der Kurzformen in einem Programm p durch Ihre Unterprogramme die Semantik des Programmes nicht ändert.

Aufgabe 4.4:

Geben Sie ein zum Programm $p_1 = \mathsf{IfZ}(i, p, q)$ äquivalentes While-Programm p_2 an, welches kein IfZ enthält. Zeigen Sie, dass $p_1 \equiv p_2$ gilt.

Aufgabe 4.5:

Zeigen Sie, dass die Menge WHILE unter Substitution abgeschlossen ist, dass also für alle partiellen Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt:
falls $f, g \in \mathsf{WHILE}$, dann ist auch $x \mapsto f(g(x))) \in \mathsf{WHILE}$

Aufgabe 4.6:

Zur Übersetzung von While nach Goto: Bestimmen Sie

1. $\mathsf{compile}(3, \mathsf{While}\,1(\mathsf{Dec}\,1)) =$
2. $\mathsf{compile}(0, \mathsf{IfZ}(1, \mathsf{Dec}\,1, \mathsf{Inc}\,0)) =$
3. $\mathsf{compile}(0, \mathsf{While}\,2(\mathsf{IfZ}\,1, \mathsf{Seq}(\mathsf{Dec}\,1, \mathsf{Inc}\,0), \mathsf{Skip})) =$

Aufgabe 4.7:

Zeigen Sie, dass für jedes While-Programm p und das daraus erzeugte Goto-Programm $q = p' \circ [\mathsf{Stop}]$ mit $\mathsf{compile}(0, p) = (e, p')$ gilt:
q erreicht eine finale Konfiguration gdw. p hält.