Prof. Dr. Sibylle Schwarz, HTWK Leipzig, FIM sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

5. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität
Wintersemester 2026/27 zu lösen bis 19. November 2026

Aufgabe 5.1:

Zeigen Sie, dass zu jedem Loop-Programm p ein äquivalentes Loop-Programm q existiert, in dem kein IfZ vorkommt.

Aufgabe 5.2:

Zeigen Sie, dass die Menge LOOP unter (mehrstelliger) Substitution abgeschlossen ist, d.h. für alle partiellen Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt:
falls $f \in$ LOOP und $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \in$ LOOP , dann $(x \mapsto f(g_1(x), \ldots, g_n(x))) \in$ LOOP

Aufgabe 5.3:

In verschiedenen Codierungen von Paaren, Listen usw. wurden Primzahlpotenzen verwendet.
Zeigen Sie, dass die Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\forall i \in \mathbb{N} : p(i) = i$-te Primzahl

1. While-berechenbar ist,
2. Loop-berechenbar ist.

Aufgabe 5.4:

1. Geben Sie eine Baum-Codierung B für Bäume über einer gegebenen Signatur Σ_F (endliche Menge von Funktionssysmbolen, jeweils mit Stelligkeit) an. Zeigen Sie, dass B eine Baum-Codierung ist.
2. Geben Sie ein Loop-Programm an, welches B berechnet.
3. Berechnen Sie für $\Sigma_F = \{(f, 1), (g, 2), (a, 0), (b, 0)\}$: $B(a)$, $B(f(f(b)))$ und $B(g(b, f(a)))$
4. Geben Sie eine Signatur Σ_L zur Beschreibung aller Loop-Programme an. Berechnen Sie $B(P)$ für das Loop-Programm $\mathsf{Seq}(\mathsf{Loop}(i, \mathsf{Inc}\, k), \mathsf{Seq}(\mathsf{Inc}(k), \mathsf{Loop}(i, \mathsf{Dec}\, k)))$

Aufgabe 5.5:

1. Bestimmen Sie schrittweise die Werte $A(2, 4)$, $A(3, 3)$, $A(4, 2)$ der Ackermann-Funktion und geben Sie jeweils an, für welche kleineren Argumente $x, y \in \mathbb{N}$ die Werte $A(x, y)$ dabei in welcher Reihenfolge berechnet werden müssen.
2. Zeigen Sie, dass für die Ackermann-Funktion $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gilt

   $\forall x, y \in \mathbb{N} : A(x + 1, y) \geqslant A(x, y + 1)$

   Hinweis: Induktion nach y

Aufgabe 5.6:

Zeigen Sie, dass für die Ackermann-Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} A(0,n) &= n+1 \\ A(1,n) &= 2+(n+3)-3 \\ A(2,n) &= 2(n+3)-3 \\ A(3,n) &= 2^{(n+3)}-3 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.7:

Die Sudan-Funktion $S : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ ist definiert durch $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S(x,y,0) &= x+y \\ S(x,0,n+1) &= x \\ S(x,y+1,n+1) &= S(S(x,y,n+1), S(x,y,n+1)+y+1, n) \end{aligned}$$

Zeigen Sie $\forall x, y \in \mathbb{N} : S(x,y,1) = 2^y(x+2) - y - 2$