

# Was bisher geschah

- ▶ Inhalt und Organisation
- ▶ Berechenbarkeit: Plan, Beispiel
- ▶ Komplexität: Plan, Beispiel

## Wiederholung Grundlagen:

- ▶ Formale Sprachen
- ▶ Reguläre Ausdrücke
- ▶ Grammatiken
- ▶ Chomsky-Hierarchie
- ▶ Maschinenmodelle
- ▶ Logik, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit
- ▶ Abzählbarkeit

# WH: Turing-Maschine – Maschinenmodell

Definition (endliche Beschreibung) durch

- ▶ Steuereinheit: Lese/Schreib-Kopf
- ▶ interner Speicher:
  1. endliche Menge von Zuständen (Lesen / Schreiben)
  2. beidseitig unendliches Arbeitsband aus Zellen
    - ▶ Typ des Speicherinhaltes:  
endliches Wort über endlichem Alphabet (Arbeitsalphabet)
    - ▶ Zugriffsmethode: Lesen / Schreiben  
Bewegung des Lese/Schreib-Kopfes auf ein Nachbarfeld
- ▶ externer Speicher:
  3. beidseitig unendliches Eingabeband aus Zellen
    - ▶ Typ des Speicherinhaltes:  
endliches Wort über endlichem Alphabet (Eingabealphabet)
    - ▶ Zugriffsmethode: Lesen  
Bewegung des Lese-Kopfes auf ein Nachbarfeld

übliche Vereinfachung der Struktur:

Zusammenfassen der Bänder im internen und externen Speicher zu einem Eingabe- und Arbeitsband (2,3) mit Lese/Schreib-Zugriff

# WH: Turing-Maschine – Definition

Turing-Maschine (TM)  $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, \square)$  mit

$X$  endliches Eingabealphabet

$Q$  endliche Menge von Zuständen

$\Gamma \supset X$  endliches Arbeitsalphabet

$\delta \subseteq (\Gamma \times Q \times \Gamma \times Q \times \{L, R, N\})$   
Übergangsrelation

$q_0$  Startzustand

$\square \in \Gamma \setminus X$  Leere-Zelle-Symbol

TM  $M$  heißt **deterministisch** (DTM) gdw.  
für jedes  $a \in \Gamma$  und jedes  $q \in Q$  gilt

$$|\{(a, q, b, p, x) \mid p \in Q, b \in \Gamma, x \in \{L, R, N\}\} \cap \delta| \leq 1$$

# WH: Beispiele für Turing-Maschinen

- ▶ TM  $M_1 = (\{a, b\}, \{q_0, f\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit

$$\delta = \{(a, q_0, a, q_0, L), (b, q_0, b, q_0, L), (\square, q_0, \square, f, R)\}$$

- ▶ TM  $M_2 = (\{a, b\}, \{q_0, q_a, q_b, f\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (a, q_0, \square, q_a, R), (b, q_0, \square, q_b, R), \\ (a, q_a, a, q_a, R), (b, q_a, b, q_a, R), \\ (a, q_b, a, q_b, R), (b, q_b, b, q_b, R), \\ (\square, q_0, \square, f, R), (\square, q_a, a, f, R), (\square, q_b, b, f, R) \end{array} \right\}$$

- ▶ TM  $M_3 = (\{1\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, f\}, \{1, x, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (1, q_0, 1, q_1, R), (1, q_1, x, q_2, R), (1, q_2, 1, q_3, R), \\ (1, q_3, x, q_2, R), (1, q_4, 1, q_4, L), (x, q_1, x, q_1, R), \\ (x, q_2, x, q_2, R), (x, q_3, x, q_3, R), (x, q_4, x, q_4, L), \\ (\square, q_0, \square, q_0, N), (\square, q_1, \square, f, L), (\square, q_2, \square, q_4, L), \\ (\square, q_3, \square, q_3, N), (\square, q_4, \square, q_0, R) \end{array} \right\}$$

# WH: Konfigurationen von TM

TM  $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, \square)$

**Konfiguration**  $uqv \in (\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*)$  mit

- ▶ aktuellem Bandinhalt  $w = uv$
- ▶ aktuellem Zustand der TM  $q$
- ▶ Schreib-/Lesekopf der TM zeigt auf erstes Symbol von  $v$   
(Leere-Zelle-Symbol, falls  $v = \varepsilon$ )

**Startkonfigurationen**  $q_0w$  mit  $w \in X^*$

**Konfigurationsübergänge** von  $upv$  mit  $u = u'a$  und  $v = bv'$ :

für  $(b, p, c, q, R) \in \delta$  :  $upv \vdash ucqv'$

für  $(b, p, c, q, L) \in \delta$  :  $upv \vdash u'qacv'$

für  $(b, p, c, q, N) \in \delta$  :  $upv \vdash uqcv'$

## WH: Berechnung durch TM

TM  $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, \square)$

Eine Folge  $k_0, k_1, \dots$  von Konfigurationen  $k_i \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$  heißt **Berechnung** durch  $M$  für das Wort  $w \in X^*$  gdw.

1.  $k_0 = q_0 w$  ist die Startkonfiguration mit Eingabe  $w$ .
2. Für jedes  $i$  ist  $k_i \vdash k_{i+1}$  ein Konfigurationsübergang von  $M$ .

Ende von Berechnungen der TM  $M$  für ein Eingabewort  $w$ :

1. Berechnung durch  $M$  endet in  $k_i$  ( $M$  **hält**) gdw.  
aus einem  $k_i$  kein Konfigurationsübergang von  $M$  möglich ist.  
Berechnung von  $M$  endet in  $k_i$ .
2. Berechnung durch  $M$  endet nicht (unendliche Berechnung)  
gdw.  
für jedes  $i \in \mathbb{N}$  der Konfigurationsübergang  $k_i \vdash k_{i+1}$  existiert.

ÜA: Für welche Wörter halten die TM  $M_1, M_2, M_3$  auf Folie 25?

## WH: Nichtdeterministische TM

TM  $M = (\{0, 1\}, \{q_0, q_1, f\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (0, q_0, 1, q_0, R), \\ (1, q_0, 1, q_0, R), (1, q_0, 1, q_1, R), \\ (1, q_1, 1, q_1, R), \\ (\square, q_1, \square, f, L) \end{array} \right\}$$

(nichtdet. wegen  $|\{(1, q_0, 1, q_0, R), (1, q_0, 1, q_1, R)\} \cap \delta| = 2 \not\leq 1$ )

endet bei Eingabe des Wortes 11011 bei (z.B.) folgender  
Berechnung

$$\begin{array}{l} q_0 11011 \vdash 1q_0 1011 \vdash 11q_0 011 \vdash 111q_0 11 \vdash 1111q_1 1 \\ \vdash 11111q_1 \square \vdash 1111f1 \end{array}$$

# WH: Simulation nichtdeterministischer TM

## Satz

*Zu jeder nichtdeterministischen TM  $M$  existiert eine deterministische TM  $M'$  mit  $L(M) = L(M')$ .*

Beweisidee:

Menge aller möglichen Berechnungen von  $M$  bei Eingabe von  $w$  bilden einen Baum (evtl. mit unendlich langen Pfaden)

Knoten: Konfigurationen

Wurzel: Startkonfiguration (Startzustand, Eingabewort)

Blätter: Halt-Konfigurationen (ohne Folgekonfigurationen)

Kanten: zulässige Konfigurationsübergänge in  $M$

$M'$  führt Breitensuche in diesem Baum durch  
(simuliert parallele Berechnung aller Möglichkeiten, dovetailing),  
Bandinhalt von  $M'$  ist Liste von Konfigurationen aus  $M$   
 $M'$  hält, sobald eine Halt-Konfiguration von  $M$  auf dem Arbeitsband steht.

# DTM zur Berechnung von Funktionen

Beobachtung (der Nebenwirkung) der Berechnung von DTM:

Jede **deterministische** TM  $M$  berechnet eine Funktion

$$f_M : X^* \rightarrow \Gamma^*$$

**Eingabe**  $w \in X^*$ : Inhalt des Arbeitsbandes bei Start der Berechnung (Eingabewort)

**Ausgabe**  $v \in \Gamma^*$ : Inhalt des Arbeitsbandes nach Halt der TM

Falls  $M$  bei Eingabe von  $w$  nicht hält, ist  $f_M(w)$  nicht definiert.

TM  $M$  berechnet i.A. eine **partielle** Funktion

$$f_M : X^* \rightarrow \Gamma^*$$

da  $f_M$  nur für die Wörter  $w \in X^*$  definiert ist, bei deren Eingabe  $M$  hält.

# Turing-berechenbare Funktionen

Jede deterministische TM  $M$  definiert die (partielle) Funktion  $f_M : X^* \rightarrow \Gamma^*$ , wobei  $\forall w \in X^*$

$$f_M(w) = \begin{cases} v & \text{falls Bandinhalt } v, \text{ nachdem } M \text{ h\"alt} \\ \text{nicht definiert} & \text{falls } M \text{ nicht h\"alt} \end{cases}$$

Beispiel:  $M = (\{a, b\}, \{q_0, q_a, q_b, f\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (a, q_0, \square, q_a, R), (b, q_0, \square, q_b, R), (\square, q_0, \square, q_0, N) \\ (a, q_a, a, q_a, R), (b, q_a, b, q_a, R), (\square, q_a, a, f, N), \\ (a, q_b, a, q_b, R), (b, q_b, b, q_b, R), (\square, q_b, b, f, N) \end{array} \right\}$$

definiert die Funktion

$$f_M(w) = \begin{cases} vx & \text{falls } w = xv \text{ mit } x \in \{a, b\} \text{ und } v \in \{a, b\}^* \\ \text{nicht definiert} & \text{falls } w = \varepsilon \end{cases}$$

Eine Funktion  $f : X^* \rightarrow X^*$  heißt **Turing-berechenbar** gdw. eine deterministische TM  $M$  mit  $f = f_M$  existiert.

# Beispiele Turing-berechenbarer Funktionen

- ▶  $g : \{1\}^* \rightarrow \{1\}^*$  mit  $g(w)$  für alle  $w \in \{1\}^*$  undefiniert  
ist berechenbar z.B. durch die TM  
 $M = (\{1\}, \{q_0\}, \{1, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit  
 $\delta = \{(q_0, 1, q_0, 1, N), (q_0, \square, q_0, \square, N)\}$
- ▶  $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  mit

$$\forall w \in \{a, b\}^* : f(w) = \begin{cases} a^{m+n} & \text{falls } w = a^m b a^n \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar durch die TM

$M = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, f\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (a, q_0, a, q_0, R), (b, q_0, a, q_1, R), (\square, q_0, \square, q_0, N), \\ (a, q_1, a, q_1, R), (b, q_1, b, q_1, N), (\square, q_1, \square, q_2, L), \\ (a, q_2, \square, f, N) \end{array} \right\}$$

hält genau bei jedem Eingabewort aus  $a^* b a^*$ ,

**verschiebt** dabei den Teil rechts von  $b$  um eine Zelle nach links

## Komposition (Nacheinanderausführung) von TM

Für DTM  $M_1 = (X, Q_1, \Gamma_1, \delta_1, q_1, \square)$  und

$M_2 = (X, Q_2, \Gamma_2, \delta_2, q_2, \square)$  mit  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

berechnet  $M = (X, Q_1 \cup Q_2 \cup Z, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \delta, q_1, \square)$  mit

$$\begin{aligned}\delta = & \delta_1 \cup \delta_2 \\ & \cup \{(x, q, x, z_0, N) \mid x \in \Gamma_1 \wedge q \in Q_1 \wedge (x, q, \cdot, \cdot, \cdot) \notin \delta_1\} \\ & \cup \delta_Z \cup \{(x, z_f, x, q_2, N) \mid x \in \Gamma_1\}\end{aligned}$$

die Nacheinanderausführung von  $f_{M_1}$  und  $f_{M_2}$ :  $x \mapsto f_{M_2}(f_{M_1}(x))$

wobei  $\delta_Z$  alle nötigen Übergänge zwischen  $z_0 \in Z$  und  $z_f \in Z$  enthält zur

- ▶ Prüfung, ob Ausgabe  $\in X^*$  (also korrekte Eingabe für  $M_2$ ) und
- ▶ Bewegung des Kopfes an Anfang der Ausgabe

Beispiel:

Addition einer festen gegebenen Zahl durch mehrmalige  
Nacheinanderausführung von  $M_{+1}$

## Test auf 0

TM  $M_{=0} = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, \square)$  mit

$$X = \{0, 1\}$$

$$Q = \{q_0, p, f_1, f_2\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (1, q_0, 1, f_2, N), (\square, q_0, \square, f_2, N), \\ (0, q_0, 0, p, R), (1, p, 1, f_2, L), \\ (0, p, 0, f_2, L), (\square, p, \square, f_1, L), \end{array} \right\}$$

hält in Konfiguration

- ▶  $f_1 0$  für Eingabe 0 und
- ▶  $f_2 w$  für jede andere Eingabe  $w$

$M_{=0}$  testet, ob Bandinhalt = 0

# Fallunterscheidung

Für TM

$$M_{=0} = (X, Q_{=0}, \Gamma_{=0}, \delta_{=0}, q_0, \square)$$

$$M_1 = (X, Q_1, \Gamma_1, \delta_1, q_1, \square)$$

$$M_2 = (X, Q_2, \Gamma_2, \delta_2, q_2, \square)$$

mit  $Q_{=0}, Q_1, Q_2$  paarweise disjunkt

berechnet die TM

$$M = (X, Q_{=0} \cup Q_1 \cup Q_2, \Gamma_{=0} \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \delta, q_0, \square)$$

mit

$$\delta = \delta_{=0} \cup \delta_1 \cup \delta_2 \cup \bigcup_{x \in \Gamma_1} \{(x, f_1, x, q_1, N), (x, f_2, x, q_2, N)\}$$

die Funktion  $f_{M_1}$ , falls 0 auf dem Eingabeband steht, sonst  $f_{M_2}$

# Existenz nicht Turing-berechenbarer Funktionen

Ist jede Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (binärcodiert) Turing-berechenbar?  
(analog  $f : X^* \rightarrow X^*$ ,  $f : X^* \rightarrow Y^*$ ,  $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ )

**Nein** (Gegenbeispiel später)

Begründung:

1. Wieviele **Turing-Maschinen** über dem Alphabet  $\{0, 1\}$  gibt es?  
**abzählbar** viele  
Jede TM kann endlich codiert und die Menge aller dieser Codierungen kann (z.B. quasi-lexikographisch) angeordnet werden.
2. Wieviele **Funktionen**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gibt es?  
**überabzählbar** viele  
(zweites Diagonalverfahren von Cantor)

Damit existieren sogar sehr viel mehr (überabzählbar viele) Funktionen  
 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
( $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ ,  $f : X^* \rightarrow X^*$ ,  $f : X^* \rightarrow Y^*$ ,  $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ ),  
die nicht von TM berechnet werden können.

## Beispiel DTM

DTM  $M = (\{1, \bullet\}, \{q_0, q_1, q_2, f\}, \{1, \bullet, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit

$$\begin{aligned}\delta = \{ & (1, q_0, 1, q_0, R) \\ & (\bullet, q_0, 1, q_1, R) \\ & (1, q_1, 1, q_1, R) \\ & (\square, q_1, \square, q_2, L) \\ & (1, q_2, \square, f, L)\}\end{aligned}$$

akzeptiert jedes Eingabewort aus  $1^* \bullet 1^*$ ,  
verschiebt dabei den Teil nach dem  $\bullet$  um eine Zelle nach links

Nebenwirkung:

Transformation des Bandinhaltes von Beginn bis Halt der TM  
als Berechnung mit Unärdarstellungen natürlicher Zahlen: Addition

# Mehrband-Turingmaschinen

Idee:

- ▶ mehrere beidseitig unendliche Arbeitsbänder
- ▶ je ein Schreib-/Lesekopf je Band  
arbeiten unabhängig voneinander

$k$ -Band-Turing-Maschine  $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, \square)$  mit

$X$  endliches Eingabealphabet

$Q$  endliche Menge von Zuständen

$\Gamma \supset X$  endliches Arbeitsalphabet

$\delta \subseteq (\Gamma^k \times Q \times \Gamma^k \times Q \times \{L, R, N\}^k)$   
Übergangsrelation

$q_0$  Startzustand

$\square \in \Gamma \setminus X$  Leere-Zelle-Symbol

## Beispiel für Mehrband-TM

2-Band-Turing-Maschine  $M = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, \square)$  mit

$$X = \{0, 1\}$$

$$Q = \{q_0, p, f\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, \square\}$$

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} ( (0, \square), q_0, (0, 0), q_0, (R, R) ), \\ ( (1, \square), q_0, (1, 1), q_0, (R, R) ), \\ ( (\square, \square), q_0, (\square, \square), p, (L, L) ), \\ ( (0, 0), p, (0, 0), p, (L, L) ), \\ ( (1, 1), p, (1, 1), p, (L, L) ), \\ ( (\square, \square), p, (\square, \square), f, (R, R) ) \end{array} \right\}$$

kopiert Inhalt des Bandes 1 auf (zu Beginn leeres) Band 2

allgemein: Projektion  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$

# Kombination von TM

Idee:

Kombination verschiedener Einband-TM  $M_i$  zu einer Mehrband-TM  $M$

Einband-TM zur Berechnung von (binärcodiert)

- ▶  $M_{i,0} = (\{0, 1\}, \{q_0, p\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \square)$  mit  
 $\delta = \{(0, q_0, \square, q_0, R), (1, q_0, \square, q_0, R), (\square, q_0, 0, p, N)\}$   
schreibt Konstante 0 auf Band  $i$
- ▶ Nachfolger vom Inhalt des Bandes  $i$  auf Band  $i$   
 $M_{i,+1} = \dots$
- ▶ Vorgänger vom Inhalt des Bandes  $i$  auf Band  $i$   
 $M_{i,-1} = \dots$
- ▶ Kopie des Inhalts des Bandes  $i$  auf Band  $j$

# Simulation von Mehrband-TM

## Satz

*Zu jeder  $k$ -Band-TM  $M$  existiert eine TM  $N$  (mit einem Band) mit  $f_M = f_N$ .*

Beweisidee:

In  $N$  sind alle  $k$  Bänder aus  $M$  zu einem Band (mit mehreren Spuren) zusammengefügt

- ▶ Eingabe- und Arbeitsalphabet von  $N$  besteht aus  $k$ -Tupeln von Symbolen aus  $M$   
(simuliert Spuren,  $i$ -te Komponente ist Symbol auf Band  $i$ )
- ▶ Synchronisierung der Positionen aller Schreib/Lese-Köpfe nach jedem Schreibvorgang in  $M$ :
  - ▶  $N$  enthält zusätzliche Zustände und Übergänge zur Verschiebung der Inhalte einzelner Komponenten (Spuren)
  - ▶ nach jedem Schreibvorgang in  $N$ :  
Verschiebung der Inhalte jeder Spur (in mehreren Schritten):  
Kopfbewegung in  $M$  auf Band  $i$  wird simuliert  
in  $N$  durch Verschiebung des Inhaltes von Spur  $i$  um eine Zelle in die entgegengesetzte Richtung

# Elementare Turing-berechenbare Funktionen

Turing-berechenbar sind z.B. die folgenden Funktionen:

- ▶ jede Konstante  $x \in N$  ( $w \in X^*$ )
- ▶ identische Funktion  $x \mapsto x$
- ▶ Nachfolger  $x \mapsto x + 1$
- ▶ Vorgänger  $x \mapsto \max(0, x - 1)$
- ▶ Addition
- ▶ schwache Subtraktion  $(x_1, x_2) \mapsto \max(0, x_1 - x_2)$ ,  
Notation:  $x_1 \dot{-} x_2$
- ▶ Projektion  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$  (z.B. mit Mehrband-TM )

# Abschluss-Eigenschaften

Die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen ist abgeschlossen unter

## Nacheinanderausführung

Sind  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Turing-berechenbar, dann ist auch  $x \mapsto f(g(x))$  Turing-berechenbar.  
(Nacheinanderausführung der TM für  $g$  und  $f$ )

## Einsetzen (Substitution)

Sind  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g_1, g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Turing-berechenbar, dann auch  $x \mapsto f(g_1(x), g_2(x))$