# Anmerkungen zur Übung vom 11.12.

## Aufgabenblatt 6 vom 24. 11. (Lösungen)

**S6-1** Finden Sie das Minimalpolynom von $a = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Welche anderen Nullstellen hat dieses Polynom?

Mit folgenden zielgerichteten Umformungen lässt sich die Zahl der Wurzelsymbole reduzieren und schließlich ein Polynom in $a$ mit ganzzahligen Koeffizienten gewinnen:

$$\begin{aligned}
& a - \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{5} \\
\Rightarrow\ & a^2 - 2\,a\,\sqrt{2} + 2 = 8 + 2\,\sqrt{15} \\
\Rightarrow\ & a^2 - 6 = 2\,\left(a\,\sqrt{2} + \sqrt{15}\right) \\
\Rightarrow\ & \left(a^2 - 6\right)^2 = 4\,\left(2\,a^2 + 15 + 2\,a\,\sqrt{30}\right) \\
\Rightarrow\ & 8\,a\,\sqrt{30} = \left(a^2 - 6\right)^2 - 4\,\left(2\,a^2 + 15\right) = a^4 - 20\,a^2 - 24 \\
\Rightarrow\ & 1920\,a^2 = \left(a^4 - 20\,a^2 - 24\right)^2 \\
\Rightarrow\ & a^8 - 40\,a^6 + 352\,a^4 - 960\,a^2 + 576 = 0
\end{aligned}$$

Da dieses Polynom irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, ist es das gesuchte Minimalpolynom

$$p(x) = x^8 - 40\,x^6 + 352\,x^4 - 960\,x^2 + 576\,.$$

Dessen acht Nullstellen lauten $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5}$.

Das Minimalpolynom kann auch mit dem Verfahren mit unbestimmten Koeffizienten wie in der Vorlesung bestimmt werden. Details in `serie-6.txt`.

Kennt man alle Nullstellen $a_1, \dots, a_8$ des Minimalpolynoms und kann (wie in diesem Fall einfacher Quadratwurzeln) mit Polynomen über dem Körper $k = \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_8]$ rechnen, so kann das Minimalpolynom auch als distributive Normalform von

$$p = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_8) \in k[x]$$

berechnet werden, da die Koeffizienten dieses Polynoms in $\mathbb{Z}$ liegen. Eine Beispielrechnung dazu in `serie-6.txt`.

**S6-2** Beweisen Sie die Beziehung

$$\alpha = \tan\left(\frac{3}{11}\,\pi\right) + 4\,\sin\left(\frac{2}{11}\,\pi\right) = \sqrt{11}\,.$$

Rechne mit $u$ statt $\frac{\pi}{11}$ und ersetze $\sin(2\,u)$ nach der Halbwinkelformel für Tangens, um die Zahl der Kerne zu reduzieren. Wende schließlich `trigexpand` an, um alles auf den einen Kern

$\tan(u)$ zu bringen. Bestimme das Minimalpolynom für $\tan(u)$ wie in der Vorlesung und zeige, dass der Zähler von $\alpha^2 - 11$ ein Vielfaches des Minimalpolynoms ist. Details in `serie-6.txt`.

$\boxed{\textbf{S6-3}}$ Eine interessante Formel verbindet die Zahl $\pi$ mit dem Goldenen Schnitt $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\pi = 4\left(\arctan\left(\frac{1}{\phi}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\phi^3}\right)\right).$$

Beweisen Sie diese Formel.

Wegen $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ und näherungsweiser Gültigkeit der Formel muss nur

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\phi}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\phi^3}\right)\right) = 1$$

gezeigt werden. Das ist mit `trigexpand` und `ratsimp` schnell getan. Details in `serie-6.txt`.

$\boxed{\textbf{S6-4}}$ Vereinfachen Sie $q = (2^{1/2} + 3^{1/3})^{-1}$, indem Sie diesen Ausdruck als Summe von Einfachwurzeln darstellen.

Wir setzen wie in der Vorlesung $a = 2^{1/2}$ und $b = 3^{1/3}$, rechnen also mit algebraischen Zahlen $a$ und $b$ mit $a^2 \to 2$ und $b^3 \to 3$. Wir setzen

$$q = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{2} r_{ij} a^i\, b^j$$

mit unbestimmten Koeffizienten an und bestimmen diese aus der Bedingung $q\,(a+b) = 1$ durch Koeffizentenvergleich. Das dabei entstehende lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung, aus der die Antwort

$$q_0 = -2\,a\,b^2 + 3\,b^2 - 3\,a\,b + 4\,b - 4\,a + 6$$

generiert werden kann.