Anmerkungen zur Übung vom 18.12.

Aufgabenblatt 7 vom 1. 12. (Lösungen)

S7-1 Falten Sie ein A4-Blatt ($x = \sqrt{2}$ LE) ... Sie erhalten den Umriss eines „sehr regelmäßigen" Fünfecks.

Betrachte Ausgangsrechteck. Ist das Fünfeck regulär, so ist dort der Winkel zwischen der Diagonalen β und der kurzen Seite (der Länge 1) halber Innenwinkel eines regulären 5-Ecks, also $\beta = \frac{3}{10}\,\pi$ und $x = \tan\left(\frac{3}{10}\,\pi\right)$.

$$x = \tan\left(\frac{3}{10}\,\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

ist eine algebraische Zahl vom Grad 4, das Minimalpolynom von $x = \tan(\beta)$ kann wieder mit `trigexpand` aus $\tan(5\,\beta) = \tan\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)$ zu $1 - 10\,x^2 + 5\,x^4$ bestimmt werden.

Zur Berechnung der Seitenlängen bemerkt man, dass vier der Innenwinkel des Fünfecks die gleiche Größe $90° + \alpha$ haben, wobei $2\,\alpha$ der Winkel zwischen Diagonale und längerer Rechteckseite (der Länge x) ist, und der fünfte Innenwinkel die Größe β. Grund: Eine Falzkante liegt auf der Winkelhalbierenden durch $2\,\alpha$.

Weiter ist $d = \sqrt{1+x^2}$ die Diagonalenlänge des Rechtecks und $\tan(2\,\alpha) = \frac{1}{x}$, woraus sich

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(2\,\alpha)}{1+\cos(2\,\alpha)} = \frac{1/d}{1+x/d} = \frac{1}{d+x} = d - x$$

ergibt (die letztere Beziehung folgt aus $d^2 - x^2 = 1$ und wird von kaum einem CAS erkannt, wenn mit Wurzeln gerechnet wird) und weiter

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{1+\tan(\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{d+x}{2\,d}},\ \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{\tan(\alpha)^2}{1+\tan(\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{d-x}{2\,d}}\,.$$

Aus geometrischen Überlegungen ergibt sich

- für die Länge der Grundseite des Fünfecks $t = d\,\tan(\alpha)$,
- für die Länge des unteren Schenkels $y = \frac{x-d/2}{\cos(\alpha)}$ und
- für die Länge des oberen Schenkels $z = 1 - x\,\tan(\alpha)$

und mit den für $\tan(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ berechneten Werten

$$t = z = d^2 - d\,x, \quad 1 - z = d\,x - x^2 \text{ und } y = \frac{x-d/2}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{2}\,(2\,x-d)\,\sqrt{2\,d\,(d-x)}\,.$$