

Aufgabenblatt 5 vom 17. 11.

Zur Besprechung in der Übung am 20. 11.

Besprechung der Autotool-Aufgaben (A2-2) bis (A2-4).

Besprechung der Aufgabe (S3-1).

Besprechung der Autotool-Aufgaben (A3-1a), (A3-1b) sowie (A3-3a)–(A3-3c).

Ü5-1 Erkläre die Definitionen von SN, WN, CR, WCR im autotool-Quelltext <http://autolat.imn.htwk-leipzig.de/gitweb/?p=tool;a=blob;f=collection/src/Rewriting/Abstract/Semantics.hs;hb=for-ghc-7.8#l186>

z.B.: $CR(R) \iff R^{-*} \cdot R^* \subseteq R^* \cdot R^{-*}$

Termordnungen: Als *Gewichtsfunktion* auf dem Termmonoid $T(X)$ bezeichnet man ein lineares Funktional $l : T(X) \rightarrow \mathbb{N}$ der Form

$$l(x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}) = r_1 \cdot a_1 + \dots + r_n \cdot a_n$$

mit *Gewichten* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Die Standardgraduierung der Terme entspricht der Gewichtsfunktion, wo alle Gewichte gleich 1 sind.

Ü5-2 Geben Sie eine genaue Definition des Begriffs der lexikographischen Termordnung auf $T(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1 > \dots > x_n$ und ordnen Sie für $n = 3$ die Terme vom Grad 5 fallend lexikographisch.

Gibt es eine Gewichtsfunktion l , so dass für diese Terme vom Grad 5

$$t_1 > t_2 \iff l(t_1) > l(t_2)$$

gilt?

Ü5-3 Geben Sie eine genaue Definition des Begriffs der gradweise revers lexikographischen Termordnung auf $T(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1 > \dots > x_n$ und ordnen Sie für $n = 5$ die Terme vom Grad 3 fallend revers lexikographisch.

Gibt es eine Gewichtsfunktion l , so dass für diese Terme vom Grad 3

$$t_1 > t_2 \iff l(t_1) > l(t_2)$$

gilt?

Vergleichen Sie dies mit der lexikographischen Ordnung derselben Terme vom Grad 3.

Zur schriftlichen Korrektur, Abgabe bis 1. 12., Besprechung am 4. 12.

Beim Vereinfachen von geschachtelten Wurzelausdrücken zeigen sich CAS oft unerwartet schwerfällig. Um so überraschender mag es sein, dass Vereinfachungen wie

$$\begin{aligned}\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} &= 6 \\ \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} &= 2\sqrt{3} \\ \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

teilweise automatisch ausgeführt werden.

S5-1 Finden Sie ein konstruktives Kriterium, nach dem sich für vorgegebene $a, b \in \mathbb{N}$ (b kein volles Quadrat) entscheiden lässt, ob der Ausdruck $\sqrt{a + 2 \cdot \sqrt{b}}$ zu einem Ausdruck der Form $\sqrt{c} + \sqrt{d}$ mit geeigneten $c, d \in \mathbb{N}$ vereinfacht werden kann.

Geben Sie Ihre Antwort in Form einer Regel

$$\text{Rule}(\text{sqrt}(a+2*\text{sqrt}(b)), A(a,b), B(a,b))(a,b)$$

an, wobei a, b formale Parameter sind, $A(a, b)$ der zu substituierende Ausdruck und $B(a, b)$ die Bedingung angibt, unter welcher die Ersetzung ausgeführt werden darf. Geben Sie zur Demonstration für drei nicht triviale Zahlenbeispiele diese Vereinfachung jeweils an.

Zeigen Sie, dass das von Ihnen gefundene Kriterium auch notwendig ist, d. h. alle Fälle erfasst, wo Simplifikation möglich ist.

S5-2 Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin(\pi \cos(x)) = \cos(\pi \sin(x))$ und begründen Sie Ihre Antwort.

Geben Sie zur Kontrolle Näherungswerte für die Lösungen im Intervall $[-\pi, \pi]$ an.

Autotool-Aufgaben zu Relationen

A5-1 Finde eine Relation R auf einer endlichen Menge, die lokal konfluent ist, aber nicht konfluent.

A5-2 Finde eine nicht terminierende Relation R auf einer endlichen Menge M , so daß jedes Element von M eine R -Normalform besitzt.

A5-3 Gesucht ist eine Relation R auf einer endlichen Menge M mit diesen Eigenschaften:

- $\text{WCR}(R)$: R ist lokal konfluent,
- $\text{UN}(R)$: von jedem $x \in M$ erreicht man über R -Schritte höchstens eine R -Normalform
- $\neg\text{UNC}(R)$: es gilt nicht: von jedem $x \in M$ erreicht man über $(R \cup R^-)$ -Schritte höchstens eine R -Normalform