

Symbolisches Rechnen
Vorlesung
Wintersemester 2006, 2014
Sommersemester 2021

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

6. April 2021

Symbolisches Rechnen: Beispiele: Zahlen

- ▶ numerisches Rechnen mit Maschinenzahlen

```
sqrt 2 + sqrt 3 ==> 3.1462643699419726
```

```
(sqrt 2 + sqrt 3)*(sqrt 2 - sqrt 3) ==> ...
```

- ▶ exaktes Rechnen (mit algebraischen Ausdrücken)

```
( $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ) * ( $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ) = ...,
```

```
maxima: expand(%)
```

Symbolisches Rechnen: Beisp.: Funktionen

- ▶ auf konkreten Daten:

```
let f x = (x+1)^2 in f 3.1 - f 3
```

- ▶ auf symbolischen Daten: `diff((x+1)^2, x)`

- ▶ `subst([x=3], diff((x+1)^2, x))`

- ▶ eigentlich `diff(\x -> (x+1)^2)`

mit `diff :: (R -> R) -> (R -> R)`,

aber da die Mathematiker Funktionen (höhere Ordnung) immer unzweckmäßig bezeichnen, um den Lambda-Kalkül zu vermeiden ...

Symbolisches Rechnen: Motivation

hat weitreichende Anwendungen:

- ▶ Lösen von (parametrisierten) *Aufgabenklassen*
(für numerisches Rechnen muß Parameter fixiert werden)
- ▶ *exaktes* Lösen von Aufgaben
(numer. R. mit Maschinenzahlen: nur Approximation)
- ▶ experimentelle, explorative, exakte Mathematik

ist nützlich im Studium, benutzt und vertieft:

- ▶ Mathematik (Analysis, Algebra)
- ▶ Algorithmen-Entwurf, -Analyse
- ▶ Prinzipien von Programmiersprachen

Überblick

- ▶ Zahlen (große, genaue)
- ▶ Vektoren (Gitterbasen)
- ▶ Polynome
- ▶ Terme, Term-Ersetzungs-Systeme
(Anwendung: Differentiation, Vereinfachung)
- ▶ Gröbnerbasen (Termination, Vervollständigung)
- ▶ Geometrische Konfigurationen
- ▶ ... und Beweise (Anwendung von Gröbnerbasen)
- ▶ Ausblick: $A = B$, Musik, Logik, Refactoring

Literatur

- ▶ Wolfram Koepf: *Computeralgebra*, Springer, 2006. <http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/CA/>
- ▶ Hans-Gert Gräbe: *Einführung in das Symbolische Rechnen, Gröbnerbasen und Anwendungen*, Skripte, Universität Leipzig <http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe/skripte/>
- ▶ Franz Baader and Tobias Nipkow: *Term Rewriting and All That*, Cambridge, 1998. <http://www21.in.tum.de/~nipkow/TRaAT/>
- ▶ weitere Literatur siehe z.B. <https://portal.risc.jku.at/Members/hemmecke/teaching/ppscs>

Software

- ▶ wir benutzen
 - ▶ **Maxima** <http://maxima.sourceforge.net/>
 - ▶ **FriCAS** <https://github.com/fricas/fricas/>
 - ▶ **Geonext** <http://geonext.uni-bayreuth.de/>
 - ▶ **GHC** <http://www.haskell.org/ghc/>
- ▶ ist alles im Pool installiert (ssh, tmux, x2go)
- ▶ allgemeine Hinweise, auch zum Selbstbauen
<https://imweb.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/cas/>

Beispiel: S.R. und Term-Ersetzung

Regeln für symbolisches Differenzieren (nach t):

$$\begin{aligned}D(t) &\rightarrow 1 & D(\text{constant}) &\rightarrow 0 \\D(+ (x, y)) &\rightarrow + (D(x), D(y)) \\D(* (x, y)) &\rightarrow + (* (y, D(x)), * (x, D(y))) \\D(- (x, y)) &\rightarrow - (D(x), D(y))\end{aligned}$$

Robert Floyd 1967, zitiert in: Nachum Dershowitz: *33 Examples of Termination*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.31.9447>

- ▶ Korrektheit? Termination? Komplexität?
- ▶ Strategie (Auswahl von Regel und Position)?
- ▶ ausreichend? angemessen?

Beispiel: Termersetzung (cont.)

```
data E = Zero | One | T
       | Plus E E | Times E E deriving Show
```

```
e :: E
```

```
e = let b = Plus T One in Times b b
```

```
d :: E -> E
```

```
d e = case e of
```

```
  Zero -> Zero ; One -> Zero ; T -> One
```

```
  Plus x y -> Plus (d x) (d y)
```

```
  Times x y ->
```

```
    Plus (Times y (d x)) (Times x (d y))
```

Beispiel: Inverse Symbolic Calculator

- ▶ <http://wayback.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html>
zur Bestimmung ganzzahliger Relationen (z.B. zwischen Potenzen einer numerisch gegebenen Zahl)
- ▶ `sqrt(2+sqrt(3)) ==> 1.9318516525781366`

integer relations algorithm, run:

`K = 1.9318516525781366`

`K` satisfies the polynomial, $X^4 - 4X^2 + 1$
mit LLL-Algorithmus (Lenstra, Lenstra, and Lovasz, 1982),
der kurzen Vektor in geeignetem Gitter bestimmt.

Hausaufgaben KW 14, Organisatorisches

1. zum Haskell-Programm zum Symb. Differenzieren:

- ▶ füge Syntax und Regel für Quotienten hinzu
- ▶ schlage Regeln zur Vereinfachung vor

2. ISC Simple Lookup and Browser sagt für $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$:

```
Mixed constants with 5 operations  
1931851652578136 = 1/2/sin(Pi/12)
```

begründen Sie das (geometrisch oder schriftlich)

3. ein Polynom mit Nullstelle $\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3}$ bestimmen, nachrechnen.

4. Geonext: Satz von Napoleon illustrieren (gleichseitige Dreiecke über den Seiten eines beliebigen Dreiecks)

5. eigener Rechner: `rlwrap` `maxima` installieren,

Rechner im Pool: `ssh` und `tmux` ausprobieren, auch Management von Sessions, Windows, Panes (split horizontal, vertikal), vgl. [https:](https://)