

# Formale Methoden und Werkzeuge Vorlesung Wintersemester 2024

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

30. Januar 2025

## 1 Einleitung

### Formale Methoden und Werkzeuge ...

- ... zur Spezifikation, Analyse (Verifikation), Synthese von Hard- und Softwaresystemen.
  - für (geplantes) System  $S$  (Bsp: CPU, Programm)  
*formales Modell*  $M$  angeben (Bsp: logische Schaltung, endl. Automat)
  - gewünschte System-Eigenschaft  $E$  angeben  
(Bsp: Boolesche Formel, reguläre Sprache)
  - Analyse: mit Werkzeug(unterstützung) feststellen, ob das Modell die Eigenschaft hat (Bsp:  $M \Rightarrow E$ ,  $M \subseteq E$ )
  - Synthese (*Constraint-Programmierung*): Werkzeug konstruiert aus Constraint  $E$  ein passendes Modell  $M$

### Die Rolle der Abstraktion

- Schritt von System  $S$  zu Modell  $M$  ist *Abstraktion* (es werden Details ignoriert), das ist
  - teils *nützlich* (verbessert die Übersicht, Einsicht),
  - teils *notwendig* (nur wenn  $M \subseteq E$  entscheidbar oder  $M$  aus  $E$  berechenbar, kann überhaupt ein Werkzeug zur Analyse bzw. Synthese implementiert werden)

- in den einfachen Beispielen (besonders am Anfang der VL) beginnen wir die Betrachtung bereits bei  $M$  (damit wir sehen, welche Theorien angewendet werden sollen)
- das Abstrahieren muß aber auch geübt werden, es ist aber eine anwendungsspezifische Kunst

### Industrielle Anwendungen von FMW

- Verifikation von Schaltkreisen (*bevor* man diese tatsächlich produziert)  
 $F = S\text{-Implementierung}(x) \neq S\text{-Spezifikation}(x)$   
wenn  $F$  unerfüllbar ( $\neg \exists x.F$ ), dann ist Impl. korrekt
- Verifikation von Software durch *model checking*:  
Programmzustände abstrahieren durch Zustandsprädikate, Programmabläufe durch endliche Automaten.  
z. B. Thomas Ball et al. 2004: *Static Driver Verifier* <https://www.microsoft.com/en-us/research/project/slam/publications/>  
benutzt Constraint-Solver Z3 (Nikolaj Björner et al., 2007–) <https://github.com/Z3Prover/z3/wiki>

### Industrielle Anwendungen von FMW

- automatische Analyse des Ressourcenverbrauchs von Programmen
  - Termination (jede Rechnung hält)
  - Komplexität (... nach  $O(n^2)$  Schritten)
- mittels *Bewertungen* von Programmzuständen:
  - $W : \text{Zustandsmenge} \rightarrow \mathbb{N}$
  - wenn  $z_1 \rightarrow z_2$ , dann  $W(z_1) > W(z_2)$ .
- Parameter der Bewertung werden durch Constraint-System beschrieben.
- vgl. Carsten Fuhs: *Automated Termination Analysis...*, Intl. School on Rewriting, 2022 <https://viam.science.tsu.ge/clas2022/isr/termination.html>

## Anwendung: Polynom-Interpretationen

- Berechnungsmodell: Wortersetzung ( $\approx$  Turingmaschine)
- Programm:  $ab \rightarrow ba$  ( $\approx$  Bubble-Sort)  
Beispiel-Rechnung:  $abab \rightarrow baab \rightarrow baba \rightarrow bbaa$
- Bewertung  $W$  durch *Interpretation*: lineare Funktionen  $f_a(x) = Px + Q, f_b(x) = Rx + S$  mit  $P, Q, R, S \in \mathbb{N}$   
 $W(abab) = f_a(f_b(f_a(f_b(0))))$ , ...
- Interp. ist monoton:  $x > y \Rightarrow f_a(x) > f_a(y) \wedge f_b(x) > f_b(y)$
- Interp. ist kompatibel mit Programm:  $f_a(f_b(x)) > f_b(f_a(x))$
- resultierendes Constraint-System für  $P, Q, R, S$ ,
- Lösung mittels Z3

## Constraint-Programmierung—Beispiel

```
(set-logic QF_NIA) (set-option :produce-models true)
(declare-fun P () Int) (declare-fun Q () Int)
(declare-fun R () Int) (declare-fun S () Int)
(assert (and (< 0 P) (<= 0 Q) (< 0 R) (<= 0 S)))
(assert (> (+ (* P S) Q) (+ (* R Q) S)))
(check-sat) (get-value (P Q R S))
```

- *Constraint-System*: eine prädikatenlogische Formel  $F$   
 $0 < P \wedge \dots \wedge P \cdot S + Q > R \times Q + S$
- *Lösung*: Interpretation (Var.-Belegung), für die  $F$  wahr ist
- CP ist eine Form der *deklarativen* Programmierung.
- *Vorteil*: Benutzung von allgemeinen Suchverfahren (bereichs-, aber nicht anwendungsspezifisch).

## Constraints in der Unterhaltungsmathematik

- Nikoli (1980–, „the first puzzle magazine in Japan.“) <https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/>

- Erich Friedman: *Math Magic 1998–2020* <https://erich-friedman.github.io/mathmagic/>
- Simon Tatham's Portable Puzzle Collection <https://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/puzzles/>
- Angela und Otto Janko: <http://www.janko.at/Raetsel/>,
- Donald Knuth: *A Potpourri of Puzzles*, 2022, TAOCP, Band 4, Pre-Faszikel 9b, <https://cs.stanford.edu/~knuth/taocp.html>, <https://cs.stanford.edu/~knuth/fasc9b.ps.gz>

### Wettbewerbe für Constraint-Solver

- für aussagenlogische Formeln:  
<http://www.satcompetition.org/>  
(SAT = satisfiability)
- für prädikatenlogische Formeln  
<https://smt-comp.github.io/>  
(SMT = satisfiability modulo theories)  
Theorien:  $\mathbb{Z}$  mit  $\leq$ , Plus, Mal;  $\mathbb{R}$  mit  $\leq$ , Plus; ...
- Termination und Komplexität [https://www.termination-portal.org/wiki/Termination\\_Competition](https://www.termination-portal.org/wiki/Termination_Competition)

### Gliederung der Vorlesung

- Aussagenlogik
  - zur Modellierung (SAT-Kodierung) von Systemen mit endlichem Zustandsraum, begrenzter Schritt-Zahl (bounded model checking)
  - Werkzeuge: SAT-Kompiler (Tseitin-Transformation), SAT-Solver (Propagation, Backtracking, Lernen)
- endliche Automaten
  - ... endlichem Zustandsraum, unbegrenzte Schrittzahl
  - Werkzeuge: model checker

- allgemeine Beweis-Systeme
  - zur Modellierung beliebiger (unbeschränkter) Systeme
  - Methode: Typisierung (Curry-Howard-Isomorphie, `program = proof`), Werkzeuge: interaktive Beweiser

## Organisatorisches

- jede Woche 1 Vorlesung + 1 Übung
- Hausaufgaben (*Haus* bedeutet: zuhause bearbeiten, in der Übung diskutieren)
  - Aufgaben im Skript
  - Aufgaben in `autotool`
- Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten von Hausaufgaben
- Klausur (2 h, keine Hilfsmittel).
- Quelltexte, Planung und Diskussion der Übungsaufgaben <https://gitlab.dit.htwk-leipzig.de/johannes.waldmann/fmw-ws24> (Projekt-Mitgliedschaft beantragen, Zugang wird dann auf Mitglieder eingeschränkt)

## Literatur

- Cerone, A., Roggenbach, M., Schlingloff, B.-H., Schneider, G., Shaikh, S.A.: *Teaching formal methods for software engineering - ten principles*, Informatica Didactica, Nr. 9, (2015). <https://www.informaticadidactica.de/uploads/Artikel/Schlinghoff2015/Schlinghoff2015.pdf>
- Uwe Schöning, Jacob Toran: *Das Erfüllbarkeitsproblem SAT*, Lehmanns (2012)
- Christel Baier, Joost Katoen: *Principles of Model Checking*. MIT Press, Cambridge (2008)
- Samuel Mimram: *Program = Proof*, <https://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Samuel.Mimram/teaching/INF551/course.pdf>

## Hausaufgaben

WS24: 1,2, 4 (anstatt 3), 5

1. Pierluigi Crescenzi, Viggo Kann *A compendium of NP optimization problems* <https://web.archive.org/web/20200227195925/http://www.nada.kth.se/~viggo/problemlist/compendium.html>

Beispiel: Minimum File Transfer Scheduling (node195). Erläutern Sie die Spezifikation an einem Beispiel.

2. Aufgabe: formalisieren Sie *Math Magic* Februar 2007.

Was ist dabei für Springer und König einfacher als für Dame, Läufer, Turm?

(allgemein für Math Magic: offene Fragen <https://erich-friedman.github.io/mathmagic/unsolved.html>)

3. Aufgabe: formalisieren Sie <https://www.janko.at/Raetsel/Wolkenkratzer>.

- Unbekannte:  $h_{x,y} \in \{0, \dots, n-1\}$  für  $x, y \in \{0, \dots, n-1\}$

- Constraint für eine Zeile  $x$ :

$$\bigvee_{p \in \text{Permutationen}(0, \dots, n-1), p \text{ kompatibel mit Vorgaben}} \bigwedge_{y \in \{0, \dots, n-1\}} (h_{x,y} = p(y))$$

Bsp:  $n = 4$ , Vorgabe links 2, rechts 1, kompatibel sind  $[0, 2, 1, 3]$ ,  $[2, 0, 1, 3]$ ,  $[2, 1, 0, 3]$ ,  $[2, 1, 0, 3]$ .

entspr. für Spalten

- diese Formel wird exponentiell groß (wg. Anzahl Permutationen),

Folge-Aufgabe: *geht das auch polynomiell?*

#### 4. Modellierung von Puzzles (aus Tatham-Collection)

- geben Sie ein Modell an für *Pegs* (Solitaire). Hinweise:
  - Zustand = Boolesche Matrix,
  - Schritt = Relation zwischen Matrizen,
  - Lösung = Schrittfolge ( $\Rightarrow$  Zustandsfolge). Wieviele Schritte?
- diskutieren Sie Modell für *Lunar Lockout*, wobei Zustand = Abbildung von Roboter-Name auf Position ( $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ )
- Modell für *Unruly*. (keine Zustandsfolge, sondern direkt die Lösung. Welches sind die Unbekannten, welches sind ihre Beziehungen, untereinander und zur Vorgabe)
- modellieren Sie *Untangle*

Vergleichen Sie mit den tatsächlichen Quelltexten <https://git.tartarus.org/?p=simon/puzzles.git>

## 5. Constraint für monotone kompatible Bewertungsfunktion:

- lösen Sie mit Z3 (ist im Pool installiert, vgl. <https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/pool/>)
- eine *kleinste* Lösung finden (Summe von  $P, Q, R, S$  möglichst klein) — dafür Assert(s) hinzufügen.
- Abstieg der so gefundenen Bewertungsfunktion nachrechnen für  $abab \rightarrow baab \rightarrow baba \rightarrow bbaa$
- gibt diese Bewertungsfunktion die maximale Schrittzahl genau wieder? (nein)
- Folge-Aufgabe: entspr. Constraint-System für Bewertungsfunktion für  $ab \rightarrow bba$  aufstellen und lösen.

## 2 Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln (SAT)

### Aussagenlogik: Syntax

aussagenlogische Formel:

- elementar: Variable  $v_1, \dots$
- zusammengesetzt: durch Operatoren
  - einstellig: Negation
  - zweistellig: Implikation, Äquivalenz, Antivalenz,
  - mehrstellig möglich: Konjunktion, Disjunktion,

damit auch Quantifikation über endlichen Bereich  $E$   
( $\forall x \in E : F$ ) ist (endliche!) Konjunktion  $\bigwedge_{x \in E} F$

### Aussagenlogik: Semantik

- Wertebereich  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ , Halbring  $(\mathbb{B}, \vee, \wedge, 0, 1)$   
Übung: weitere Halbringe mit 2 Elementen?
- *Belegung* ist Abbildung  $b : V \rightarrow \mathbb{B}$
- *Wert* einer Formel  $F$  unter Belegung  $b$ :  $\text{val}(F, b)$
- wenn  $\text{val}(F, b) = 1$ , dann ist  $b$  ein *Modell* von  $F$ , Schreibweise:  $b \models F$
- *Modellmenge*  $\text{Mod}(F) = \{b \mid b \models F\}$

- $F$  erfüllbar, wenn  $\text{Mod}(F) \neq \emptyset$
- Modellmenge einer Formelmenge:  $\text{Mod}(M) = \{b \mid \forall F \in M : b \models F\}$

### Formulierung von SAT-Problemen mit Ersatz

- Autoren: Edward Kmett et al., <https://hackage.haskell.org/package/ersatz>,
- ```
import Prelude hiding ((&&), (||), not )
import Ersatz
main = do
  ans <- solveWith minisat $ do
    p <- exists @Bit ; q <- exists @Bit
    assert $ (p || not q) && (not p || q)
    return [p,q]
  case ans of (Satisfied, Just res) -> print res
```
- Unbekannte erzeugen (exists), Formel konstruieren (&&, ...), assertieren, lösen, Antwort benutzen
- zu Implementierung vgl. <https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/untutorial/ersatz/>

### Benutzung von SAT-Solvern

- Eingabeformat: SAT-Problem in CNF:
  - Variable = positive natürliche Zahl
  - Literal = ganze Zahl ( $\neq 0$ , mit Vorzeichen)
  - Klausel = Zeile, abgeschlossen durch 0.
  - Formel = Header `p cnf <#Variablen> <#Klauseln>`, danach Klauseln
- Beispiel: die (konk. Normal-)Formel  $(v_1 \vee \neg v_2) \wedge (\neg v_1 \vee v_2)$ :

```
p cnf 2 2
1 -2 0
-1 2 0
```

- Löser (Bsp.): `minisat input.cnf output.text`  
 Niklas Eén, Niklas Sörensson: *An Extensible SAT Solver*, 2003, <https://minisat.se/>,

## SAT-Modellierung für das $N$ -Damen-Problem

stelle möglichst viele Damen auf  $N \times N$ -Schachbrett, die sich nicht gegenseitig bedrohen.

- Unbekannte:  $q_{x,y}$  für  $(x, y) \in P = \{1, \dots, N\}^2$   
mit Bedeutung:  $q_{x,y} \iff$  Position  $(x, y)$  ist belegt
- Constraint:  $\bigwedge_{a,b \in F, a \text{ bedroht } b} \neg q_a \vee \neg q_b.$
- „möglichst viele“ läßt sich hier vereinfachen zu:  
„in jeder Zeile genau eine“.  
vereinfachen zu: „... wenigstens eine.“

wir schreiben Programm,

## $N$ -Damen mit Ersatz

- Hilfsfunktionen für Boolesche Matrizen mit `import qualified Ersatz.Relation as R`
- ```
queens n = do
  out <- solveWith (cryptominisat5Path "kissat") $ do
    b <- R.relation ((1,1), (n,n))
    assert $ flip all (rows b) $ \ r -> or r
    assert $ flip all (R.indices b) $ \ p ->
      flip all (R.indices b) $ \ q ->
        encode (reaches p q) ==> not (b R.! p && b R.! q)
    return b
  case out of
    (Satisfied, Just b) -> do putStrLn $ R.table b
```
- (vollst. Quelltext: siehe Repo)

## Zusammenfassung Ersatz (bisher)

- innerhalb von `solveWith` steht Befehlsfolge,  
Befehl ändert Zustand, bestehend aus: Variablenzähler und Klausel-Ausgabe  

```
- exists @Bit :: MonadSAT s m => m Bit, R.relation _ konstruiert
  neue Variable(n)
```

- assert :: Bit -> m ()  
 übersetzt Formel in CNF, gibt Klauseln aus

- der Typ Bit beschreibt aussagenlogische Formeln (genauer: Schaltkreise), d.h., *symbolische* Repräsentation von (unbekannten) Wahrheitswerten  
 Typ Bool beschreibt konkrete (bekannte) Wahrheitswerte  
 booleschen Operatoren ( import Ersatz ) sind polymorph  
 not :: Bool -> Bool, not :: Bit -> Bit.

### Modellierung durch SAT: Ramsey

gesucht ist Kanten-2-Färbung des  $K_5$  ohne einfarbigen  $K_3$ .

- Aussagenvariablen  $f_{i,j}$  = Kante  $(i, j)$  ist rot (sonst blau).
- Constraints:

$$\forall p : \forall q : \forall r : (p < q \wedge q < r) \Rightarrow ((f_{p,q} \vee f_{q,r} \vee f_{p,r}) \wedge \dots)$$

das ist ein Beispiel für ein Ramsey-Problem

(F. P. Ramsey, 1903–1930) <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Ramsey.html>

diese sind schwer, z. B. ist bis heute unbekannt: gibt es eine Kanten-2-Färbung des  $K_{43}$  ohne einfarbigen  $K_5$ ?

<http://www1.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf>

### SAT-Modell für Peg-Solitaire

- Spielzug: Stein überspringen und entfernen,  
 Aufgabe: existiert Zugfolge von Initial (gegeben)  
 zu Final (genau ein Stein übrig)
- Beispie: Initial ist volles Rechteck minus ein Stein
- (Wdhlg.) aussagenlog. Modell als Folge von Relationen  $[B_0, B_1, \dots, B_n]$ , für die gilt  $\forall k : \text{step}(B_k, B_{k+1})$ .
- eine Realisierung:  $\text{move}(S, m, d, T)$  mit:  $S, T$  Brett,  $m$  Position (des übersprungenen Steins),  $d$  Richtung  
 und  $\text{step}(S, T) = \bigvee_{m,d} \text{move}(S, m, d, T)$
- Finalität von  $B_n$  ist einfach: das Zählen muß nicht SAT-kodiert werden—warum?

## Hausaufgaben

WS 24: 2,3,4 (5, 7, 8 siehe Repo)

1. unterschiedliche Halbringe auf zwei Elementen?
2. für die Formel  $S(b, h)$  (abhängig von Parametern  $b, h \in \mathbb{N}$ )  
Variablen:  $v_{x,y}$  für  $1 \leq x \leq b, 1 \leq y \leq h$   
Constraints:
  - für jedes  $x$  gilt: wenigstens einer von  $v_{x,1}, v_{x,2}, \dots, v_{x,h}$  ist wahr
  - und für jedes  $y$  gilt: höchstens einer von  $v_{1,y}, v_{2,y}, \dots, v_{b,y}$  ist wahr
  - (a) unter welcher Bedingung an  $b, h$  ist  $S(b, h)$  erfüllbar?  
Für den erfüllbaren Fall: geben Sie ein Modell an.  
Für den nicht erfüllbaren Fall: einen Beweis.
  - (b) Erzeugen Sie (eine konjunktive Normalform für)  $S(b, h)$  durch ein Programm (Sprache/Bibliothek beliebig)  
( $b, h$  von der Kommandozeile, Ausgabe nach `stdout`)
  - (c) Lösen Sie  $S(b, h)$  durch `minisat` (`kissat`, `Z3`, ...), vergleichen Sie die Laufzeiten (auch im nicht erfüllbaren Fall).
3. Für  $S(b, h)$  (vorige Aufgabe): Formel-Konstruktion, Löser-Aufruf mit Ersatz.
  - $v$  vom Typ `Relation Int Int` (vgl. `N Damen`)
  - „für jedes  $x$ “: verwenden Sie `rows`
  - „für jedes  $y$ “: schreiben und verwenden Sie entsprechende Fkt. `columns`
  - „höchstens einer“: verwenden Sie „keine zwei“.

4. Für  $a, b \geq 2$ : die Ramsey-Zahl  $R(a, b)$  ist die kleinste Zahl  $n$ , für die gilt: jede rot-blau-Kantenfärbung eines  $K_n$  enthält einen roten  $K_a$  oder einen blauen  $K_b$ .

(Der Satz von Ramsey ist, daß es für jedes  $a, b$  tatsächlich solche  $n$  gibt.)

(a) Beweisen Sie:

i.  $R(a, b) = R(b, a)$

ii.  $R(2, b) = b$

iii.  $R(a + 1, b + 1) \leq R(a, b + 1) + R(a + 1, b)$

(das liefert einen Beweis des Satzes von Ramsey)

iv. wenn dabei beide Summanden rechts gerade Zahlen sind, dann  $R(a + 1, b + 1) < \dots$

(b) Bestimmen Sie damit obere Schranken für  $R(3, 3), R(3, 4), R(4, 4)$  und vergleichen Sie mit den unteren Schranken durch SAT-Kodierung.

5. SAT-Kodierung für  $R(a, b)$  mit Ersatz:

- `main = ramsey 3 3 5`

```
ramsey a b n = do
  out <- solveWith (cryptominisat5Path "kissat") $ do
    r <- R.symmetric_relation ((1,1), (n,n))
    assert $ flip all (subs a [1 .. n]) $ \ c ->
      flip any (subs 2 c) $ \ [x,y] ->
        r R.! (x,y)
    assert $ flip all (subs b [1 .. n]) $ \ c ->
      flip any (subs 2 c) $ \ [x,y] ->
        not $ r R.! (x,y)
  return r
...
```

- Hilfsfunktion: verteilten Teilfolgen gegebener Länge:

Beispiel: `subs 3 [1, 2, 3, 4, 5] = [[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 2, 5], ..., [3, 4, 5]]`  
 (nicht notwendig in dieser Reihenfolge)

```
subs :: Int -> [a] -> [[a]]
subs 0 xs = [ [] ] ; subs k [] = []
subs k (x:xs) = map _ _ <> subs k xs
```

mit `subs a [1 .. n]` zur Auswahl des  $K_a$  sowie `subs 2 c` zur Auswahl der Kanten.

- Diskutieren Sie Existenz (obere Schranke) und SAT-Kodierung für dreifarbi-  
gen Ramsey:

$R(a, b, c) :=$  das kleinste  $n$  mit: jeder Kanten-3-Färbung des  $K_n$  enthält einen roten  $K_a$  oder einen grünen  $K_b$  oder einen blauen  $K_c$ .

Ergänzen und beweisen:  $R(a, b, c) \leq R(a, R(b, c))$ , anwenden für  $R(3, 3, 3)$ .

## 6. Modellierung als aussagenlogisches Constraint:

- Rösselsprung (= Hamiltonkreis)
- Norinori <https://nikoli.com/en/puzzles/norinori/>
- ABCEndView (oder ähnlich) <https://www.janko.at/Raetsel/AbcEndView/>

### Vorgehen bei Modellierung:

- welches sind die Unbekannten, was ist deren Bedeutung?  
(Wie rekonstruiert man eine Lösung aus der Belegung, die der Solver liefert?)
- welches sind die Constraints?  
(wie stellt man sie in CNF dar? — falls nötig)

## 7. Unruly (S. Tatham Puzzles)

```
u1 = M.fromList -- eine Aufgabe (8 x 8)
  $ map (,False) [(1,7), (3,2), (5,1), (5,3), (5,4), (5,7), (6,7)]
  <> map (,True) [(1,4), (6,2), (6,3), (7,5), (8,4), (8,5)]
unruly u = do
  let bnd = ((1,1), (8,8))
  out <- solveWith (cryptominisat5Path "kissat") $ do
    b <- R.relation bnd
    assert $ flip all (M.toList u) $ \ (k,v) ->
      b R.! k === encode v
    assert $ flip all (rows b <> columns b) $ \ rc ->
      balanced rc && mixed 3 rc
  ...
```

wie kann man feststellen, daß es genau eine Lösung gibt? (Solver nochmals aufrufen für modifizierte Formel.)

## 8. Peg (S. Tatham Puzzles)

```
peg b = do
  let bnd = ((1,1), (b,b))
      full = A.genArray bnd $ \ i -> True
      start :: A.Array (Int,Int) Bool
      start = full A.// [((1,2), False)]
  out <- solveWith (cryptominisat5Path "kissat") $ do
    boards <- replicateM (b*b - 1) $ R.relation bnd
    assert $ R.equals (head boards) (encode start)
    assert $ all step $ zip boards $ drop 1 boards
    return boards
  ...
type Board = R.Relation Int Int

step :: (Board, Board) -> Bit
move :: Board -> (Int,Int) -> (Int,Int) -> Board -> Bit
```

# 3 Anwendg.: Bounded Model Checking

## Begriff, Motivation

- *model checking*: feststellen, ob
  - ein *Modell* eines realen Hard- oder Softwaresystems (z.B. Zustandsübergangssystem f. nebenläufiges Programm)
  - eine *Spezifikation* erfüllt (z.B. gegenseitiger Ausschluß, Liveness, Fairness)
- *symbolic model checking*:
  - symbolische Repräsentation von Zustandsfolgen
  - im Unterschied zu tatsächlicher Ausführung (Simulation)
- *bounded*: für Folgen beschränkter Länge

## Literatur, Software

- Armin Biere et al.: *Symbolic Model Checking without BDDs*, TACAS 1999, <http://fmv.jku.at/bmc/>  
Software damals: Übersetzung nach SAT, später: SMT (QB\_BV), Solver: <http://fmv.jku.at/boolector/>
- Daniel Kroening und Ofer Strichman: *Decision Procedures, an algorithmic point of view*, Springer, 2008. <http://www.decision-procedures.org/>  
Software: <http://www.cprover.org/cbmc/>
- Nikolaj Bjørner et al.: *Program Verification as Satisfiability Modulo Theories*, SMT-Workshop 2012, <http://smt2012.loria.fr/>  
Softw.: <https://github.com/Z3Prover/z3/wiki>

### **BMC für Mutual Exclusion-Protokolle**

System mit zwei (gleichartigen) Prozessen  $A, B$ :

```
A0: maybe goto A1
A1: if l goto A1 else goto A2
A2: l := 1; goto A3
A3: [critical;] goto A4
A4: l := 0; goto A0
```

```
B0: maybe goto B1
B1: if l goto B1 else goto B2
B2: l := 1; goto B3
B3: [critical;] goto B4
B4: l := 0; goto B0
```

Schließen sich A3 und B3 gegenseitig aus? (Nein.)

(nach: Donald E. Knuth: TAOCP, Vol. 4 Fasz. 6, S. 20ff)

### **Modell: Zustandsübergangssystem**

Zustände:

- jeder Zustand besteht aus:
  - Inhalte der Speicherstellen (hier:  $l \in \{0, 1\}$ )

- Programmzähler (PC) jedes Prozesses  
(hier:  $A \in \{0 \dots 4\}, B \in \{0 \dots 4\}$ )

- Initialzustand:  $I = \{l = 0, A = 0, B = 0\}$
- Menge der Fehlerzustände:  $F = \{A = 3, B = 3\}$

Übergangsrelation (nichtdeterministisch): für  $P \in \{A, B\}$ :

- $P$  führt eine Aktion aus (schreibt Speicher, ändert PC)

Aussagenlog. Formel für  $I \rightarrow^{\leq k} F$  angeben,  
deren Erfüllbarkeit durch SAT- oder SMT-Solver bestimmen

### One-Hot-Kodierung

- $p \in \{0 \dots 4\}$  symbolisch repräsentieren durch Folge  $[p_0, \dots, p_4]$  von symbolischen Wahrheitswerten  
... von denen *genau einer* wahr ist  
Bsp:  $p = 3$  kodiert durch  $[0, 0, 0, 1, 0]$ .
- das ist die *one hot*-Kodierung (eine Stelle ist *hot* = stromführend)
- eine Realisierung ist  $(\bigvee_i p_i) \wedge \bigwedge_{i < j} (\neg p_i \vee \neg p_j)$
- es gibt andere Kodierungen für endliche Bereiche (z.B.: binär: benötigt weniger Unbekannte, aber evtl. größere Formeln)

### Übung BMC

- Software: <https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/boumchak>
- überprüfe 1. gegenseitigen Ausschluß, 2. deadlock, 3. livelock (starvation) für weitere Systeme, z.B.

E. W. Dijkstra, 1965: <https://www.cs.utexas.edu/~EWD/transcriptions/EWD01xx/EWD123.html#2.1>.

G. L. Peterson, *Myths About the Mutual Exclusion Problem*, Information Processing Letters 12(3) 1981, 115–116

## 4 Anzahl-Constraints

### Definition, Motivation

- $\text{Count}_{\leq k}(x_1, \dots, x_n) := (\sum_i x_i) \leq k$ .
- AMO (at most one): =  $\text{Count}_{\leq 1}$ , entspr. ALO, EXO
- Schubfach-Constraint (als Testfall, erfüllbar gdw.  $B \leq H$ )  
 $\bigwedge_{1 \leq i \leq H} \text{AMO}(x_{ij} | 1 \leq j \leq B) \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq B} \text{ALO}(x_{ij} | 1 \leq i \leq H)$
- Schubfach für  $B = H$ : dann ist  $x$  Permutationsmatrix, repräsentiert Bijektion von  $\{1, \dots, B\}$  auf sich
- Anwend.: Rösselsprung, Hamiltonkreis in  $G = (V, E)$   
Pfad  $p$  in  $G$  als Bijektion von Indexmenge  $\{1, \dots, |V|\}$  in Knotenmenge  $V$  mit  $\bigwedge_i (p(i), p(i+1)) \in E$ .

### SAT-Kodierung eines Rösselsprungs

```
let n = height * width; places = [0 .. n-1]

let decode p = divMod p width
    edge p q =
        let (px,py) = decode p; (qx,qy) = decode q
            in 5 == (px-qx)^2 + (py-qy)^2
    rotate (x:xs) = xs <> [x]

a <- replicateM n $ replicateM n $ exists @Bit
assert $ all exactly_one a
assert $ all exactly_one $ transpose a
assert $ flip all (zip a $ rotate a) $ \ (e, f) ->
    flip all places $ \ p -> e!!p ==>
        flip any (filter (edge p) places) (\ q -> f!!q)
```

### SAT-Kodierungen von AMO (I) (quad, lin)

- quadratisch:  $\text{AMO}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge \{\overline{x_i} \vee \overline{x_j} | 1 \leq i < j \leq n\}$   
( $\binom{n}{2}$ ) Klauseln, keine zusätzlichen Variablen

- linear: mit Kodierung  $\text{enc} : x \mapsto (x_e, x_z) = (x \geq 1, x \geq 2)$ :  
 $0 \mapsto (0, 0), 1 \mapsto (1, 0), 2, 3, \dots \mapsto (1, 1)$   
 Addition:  $(x_e, x_z) +_{\text{enc}} (y_e, y_z) = \dots$   
 so daß  $\text{enc}(x + y) = \text{enc}(x) +_{\text{enc}} \text{enc}(y)$   
 $\text{AMO}(x_1, \dots, x_n) = \text{let } (s_e, s_z) = \sum_{\text{enc}} \text{enc}(x_i) \text{ in } \dots$

### SAT-Kodierungen von AMO (II) - log

- $\text{AMO}(x) = \exists h : (x_i \Rightarrow (i = h))$   
 $h$  binär repräsentiert mit  $\log n$  Bits.
- Bsp.  $\text{AMO}(x_0, \dots, x_3) = \exists h_1, h_0 :$ 

$$\begin{aligned} & (\bar{x}_0 \vee \bar{h}_1) \wedge (\bar{x}_0 \vee \bar{h}_0) \\ & \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{h}_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee h_0) \\ & \wedge (\bar{x}_2 \vee h_1) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{h}_0) \\ & \wedge (\bar{x}_3 \vee h_1) \wedge (\bar{x}_3 \vee h_0) \end{aligned}$$
- $n \log n$  Klauseln,  $\log n$  zusätzliche Variablen
- die Hilfsvariablen  $h_0, h_1$  sind keine Funktionen der Eingangsvariablen. (wenn alle  $x_i$  falsch, dann  $h_i$  beliebig)
- Ü: man kann eine Skolem-Funktion trotzdem einfach angeben

### SAT-Kodierungen von AMO (III) - sqrt

- für  $\text{AMO}(x)$ : die  $x$  in einem Rechteck anordnen,  
 $z_i := \bigvee_j x_{ij}$  (Zeile  $i$ ),  $s_j := \bigvee_i x_{ij}$  (Spalte  $j$ ),  
 dann  $\text{AMO}(x) = \text{AMO}(z) \wedge \text{AMO}(s)$ .  
 Jingchao Chen: *A New SAT Encoding of the At-Most-One Constraint* 10th Workshop Constraint Modeling and Reformulation, 2010 <https://www.it.uu.se/research/group/astra/ModRef10/programme.html>
- Formelgröße  $f(n) = \Theta(n) + 2f(\sqrt{n})$ , mit  $\Theta(\sqrt{n})$  Hilfsvar.  
 Lineare Faktoren sind klein. Ü: wenn `assert (amo xs)`, kann man einige Klauseln weglassen. Welche?

## Aufgaben

WS 24: Nachdenken: 1, 2, 4, 8, 9; Programmieren: 7, 10

1. Modellierung Sudoku: Kodierung eines (ausgefüllten) Schemas durch  $9 \times 9 \times 9$  unbekannte Bit mit  $u_{x,y,z} \iff$  auf Koordinate  $(x, y)$  steht Zahl  $z$ .  
für welche Teilmengen gelten EXO-Constraints?  
Hinweis: für  $9^2 + 3 \cdot 9^2$  Mengen, jede mit 9 Elementen.
2. geben Sie Beispiele aus Rätsel-Sammlungen von Nikoli, Janko, Tatham, bei deren SAT-Kodierung AMO- oder EXO-Constraints vorkommen sollten
3. Vergleichen Sie die *commander*-Kodierung für AMO von Klieber und Kwon, Int. Workshop Constraints in Formal Verification, 2007, mit Kodierungen aus dem Skript.  
a) auf dem Papier, b) praktisch: mit ersatz implementieren, Formelgrößen messen, auch nach Vorverarbeitung durch minisat
4. für AMO-log: geben Sie eine Skolem-Funktion für  $\forall x_0, \dots \exists h_0, \dots : \dots$  an.  
d.h., die eine erfüllende Belegung der  $h_i$  bestimmt, falls  $\text{AMO}(x_0, \dots)$  wahr ist.
5. für AMO über  $2^k$  Argumente: verwenden Sie *sqrt*-Kodierung für Rechteck mit Abmessungen  $2 \times 2^{k-1}$ , dann rekursiv über  $2^{k-1}$ .  
Vergleichen Sie mit der *log*-Kodierung.
6. für AMO-lin: untersuchen Sie den Unterschied zwischen der Verwendung von *foldr* (von rechts) und *foldb* (balanciert)  
welche Maße der erzeugten Formel stimmen überein, welche unterscheiden sich?
7. vergleichen Sie Formelgrößen und Solver-Laufzeiten für unterschiedliche AMO-Kodierungen für die Spalten in den unlösbaren Schubfach-Formeln  $S(n+1, n)$ .
8. für die AMO-Kodierungen *linear* und *sqrt*: wie kann mit möglichst wenig Zusatz-Aufwand EXO erhalten?
9. ordnen Sie die EXO-Kodierung im Bounded Model Checker (*boumchak*) in die Systematik der VL ein.
10. Für den Rösselsprung (Code in `fmw-24/leap`)
  - gegebene EXO-Implementierung diskutieren, durch andere ersetzen, Formelgröße/Solverlaufzeit beobachten
  - zusätzliches `assert $ a !! 0 !! 0` diskutieren
  - andere Sprung-Distanzen (Giraffe usw., siehe unten)
  - Kamel (1,3)-Sprung (auf nur schwarzen? oder weißen?) Feldern implementieren

- andere Kodierung für Hamiltonkreis: Neng-Fa Zhou: *In Pursuit of an Efficient SAT Encoding for the Hamiltonian Cycle Problem*, CP 2020, ModRef 2019, <https://www.sci.brooklyn.cuny.edu/~zhou/>

- Anwendung: George Jelliss: *Leapers at Large*, 2001, 2022 <http://www.mayhematics.com/t/pl.htm>

Resultate zur Existenz von Hamilton-Pfaden (HP) und -Kreisen (HC) nachrechnen und ergänzen, Bsp.:

- HP für Giraffe (1, 4) auf  $11 \times 11$ ?  
(Nein—unsat nach 6 Stunden)
- HP für Zebra (2, 3) auf  $13 \times 13$ ?
- HP für Antilope (3, 4) auf  $20 \times 20$ ?

vgl. Donald Knuth: *Leaper Graphs*, 1994, <https://arxiv.org/abs/math/9411240>

## 5 SAT: Normalformen, Transformationen

### Normalformen (DNF, CNF)

Definitionen:

- Variable:  $v_1, \dots$  Literal:  $v$  oder  $\neg v$
- DNF-Klausel: Konjunktion von Literalen
- DNF-Formel: Disjunktion von DNF-Klauseln
- CNF-Klausel: Disjunktion von Literalen
- CNF-Formel: Konjunktion von CNF-Klauseln

Disjunktion als Implikation: diese Formeln sind äquivalent:

- $(x_1 \wedge \dots \wedge x_m) \rightarrow (y_1 \vee \dots \vee y_n)$
- $(\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_m \vee y_1 \vee \dots \vee y_n)$

### Äquivalenzen

- Def: Formeln  $F$  und  $G$  heißen *äquivalent*, wenn  $\text{Mod}(F) = \text{Mod}(G)$ .
- Satz: zu jeder Formel  $F$  existiert äquivalente Formel  $G$  in DNF.
- Satz: zu jeder Formel  $F$  existiert äquivalente Formel  $G'$  in CNF.
- aber ... wie groß sind diese Normalformen?

## Erfüllbarkeits-Äquivalenz

- Def:  $F$  und  $G$  *erfüllbarkeitsäquivalent*, wenn  $\text{Mod}(F) \neq \emptyset \iff \text{Mod}(G) \neq \emptyset$ .
- Satz: es gibt einen Polynomialzeit-Algorithmus, der zu jeder Formel  $F$  eine erfüllbarkeitsäquivalente CNF-Formel  $G$  berechnet.
- (Zeit  $\geq$  Platz, also auch  $|G| = \text{Poly}(|F|)$ )
- Beweis (folgt): Tseitin-Transformation
- Vor-Überlegung: warum gibt es keine vergleichbare Aussage für DNF?

## Tseitin-Transformation

Spezifikation:

- Gegeben  $F$ , gesucht erfüllbarkeitsäquivalentes  $G$  in CNF.
- wir verschärfen das zu:  $\text{Var}(F) \subseteq \text{Var}(G)$  und  $\forall b : b \models F \iff \exists b' : b \subseteq b' \wedge b' \models G$ .

Plan:

- für jeden nicht-Blatt-Teilbaum  $T$  des Syntaxbaumes von  $F$  eine zusätzliche Variable  $n_T$  einführen,
- so daß  $\forall b' \in \text{Mod}(G) : \text{val}(n_T, b') = \text{val}(T, b)$ .

Realisierung:

- (Bsp.)  $T = L \vee R$ , dann  $n_T \leftrightarrow (n_L \vee n_R)$  als CNF
- für jeden der  $|F|$  Knoten:  $\leq 8$  Klauseln mit 3 Literalen

## Tseitin-Transf. für Schaltkreise

- beschriebenes Verfahren funktioniert ebenso für Schaltkreise (azyklische gerichtete Graphen, mit Booleschen Operatoren markiert)
- Schaltkreis entsteht aus Baum durch Identifikation (sharing) von Knoten
- für jeden Knoten eine neue Variable angelegen und deren Wert lokal durch eine CNF bestimmen
- Ersatz realisiert *observable sharing* durch Adress-Vergleich von Syntaxbaumknoten (des Typs Bit)

```
-- (a || b) wird nur einmal T-transformiert:  
let { s = a || b } in s && (c === s)
```

## Tseitin-Transformation in Ersatz (Bsp)

- so ausprobieren:

```
ghci> :set -XTypeApplications
ghci> runSAT' $ do
  x <- exists; y <- exists @Bit; assert (x === y)
  ((, SAT 4 ((1) & (-4 | -3 | -2) & (-4 | 2 | 3)
    & (-2 | 3 | 4) & (-3 | 2 | 4) & (-4)) mempty)
```

- Aufgabe: damit observable sharing bestätigen
- Aufgabe: CNF zu `assert (x /= (y /= z))` (XOR)

## Abmessungen von Schaltkreisen

- (die Frage ist *nicht*, ob AMD Epyc in SP5-Sockel paßt)
- Def. Schaltkreis (circuit): gerichteter kreisfreier markierter Graph, als symbolische Repräsent. einer Booleschen Fkt.
- Def. Abmessung (complexity):
  - Def. Größe (size): Anzahl der Knoten
    - \* bei Hardware: Material-Aufwand
    - \* für SAT-Kodierung: (nach Tseitin-T.) Größe der CNF
  - Def. Tiefe (depth): Länge eines längsten Pfades
    - \* bei (paralleler!) Hardware: Rechenzeit
    - \* bei SAT-Kodierung: Länge von Abhängigkeitsketten von (Hilfs)variablen, beeinflußt Solver-Laufzeit
- Bsp: XOR  $N$ -stellig:  $O(N)$  Größe,  $O(\log(N))$  Tiefe

## Abmessungen von Schaltkreisen: wozu?

- SAT-Kodierung: man möchte immer die (Teil)Formel, für die der Solver am schnellsten die Erfüllbarkeit entscheiden kann
- das läßt sich sehr schwer vorhersagen, abhängig von
  - Lösungsverfahren auf Teilformeln

- nicht-lokale Kombination von Teil-Lösungen
- betrachten stattdessen die Größe der Eingabe (CNF, Größen sind: Anzahl Variablen, Anzahl Klauseln)
  - in vielen Publikationen so durchgeführt (siehe AMO)
- ... stattdessen Größe eines Schaltkreises
  - mit beschränktem Eingangsgrad (z. B. 2)
  - unbeschränkt nur f. Disjunktion, Konjunktion

### Aufgaben zu Tseitin-Transformation

1. für diese Formeln:

- $(x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow (x_3 \leftrightarrow x_4)$
- Halb-Adder (2 Eingänge  $x, y$ , 2 Ausgänge  $r, c$ )  
 $(r \leftrightarrow (\neg(x \leftrightarrow y))) \wedge (c \leftrightarrow (x \wedge y))$
- Full-Adder (3 Eingänge, 2 Ausgänge)

jeweils:

- führe die Tseitin-Transformation durch
  - gibt es kleinere erfüllbarkeitsäquivalente CNF? (deren Modelle Erweiterungen der Original-Modelle sind)
2. `data Bit` hat weitere Konstruktoren (Xor, Mux).  
 Wo werden diese benutzt?  
 Helfen sie tatsächlich bei der Erzeugung kleiner CNFs?

## 6 SAT-Solver

### Spezifikation

- Eingabe: eine Formel in CNF  $[[1],[-4,-3,11],[-11,3],[-11,4],[-11],[3,4,13],[-13,-3],[-13,-4],[-2,12,13],[-12,2],[-13,-12],[-12],[-7,-6,14],[-14,6],[-14,7],[-14],[6,7,16],[-16,-6],[-16,-7],[-5,15,16],[-15,5],[-16,-15],[-15],[-10,-9,17],[-17,9],[-17,10],[-17],[9,10,19],[-19,-9],[-19,-10],[-8,18,19],[-18,8],[-19,-18],[-18],[2,5,8,20],[-20,-2],[-20,-5],[-20,-8],[-20],[3,6,9,21],[-21,-3],[-21,-6],[-21,-9],[-21],[4,7,10,22],[-22,-4],[-22,-7],[-22,-10],[-22]]$

- Ausgabe:
  - eine erfüllende Belegung
  - *oder* ein Beweis für Nichterfüllbarkeit

### Implementierung eines naiven SAT-Solvers

- benutzt die Schnittstelle aus `ersatz`

```
minisat :: Solver SAT IO
type Solver s m
  = s -> m (Result, IntMap Bool)
data Result
  = Unsolved | Unsatisfied | Satisfied
class DIMACS t where
  dimacsNumVariables :: t -> Int
  dimacsClauses     :: t -> Seq IntSet
data SAT; instances DIMACS Sat
```

### Lösungsverfahren

- vollständige Suche (alle Belegungen, vollst. Binärbaum)
- unvollständige Suche (einige Belegungen)
  - evolutionär (Genotyp = Belegung)
  - lokale Suche (Selman, Kautz, Cohen 1993: Walksat)
- verbesserte vollständige Suche (Erkennen und Abschneiden sinnloser Teilbäume)
  - DPLL (Davis, Putnam, Logeman, Loveland 1960/61)
- weitere Verbesserungen durch
  - Lernen (und Vergessen!) von zusätzlichen Klauseln
  - Vorverarbeitung zum Entfernen von Variablen
  - Parallelisierung
    - (Kommunikation mehrerer Suchverfahren)

## Evolutionäre Algorithmen für SAT

- Genotyp: Bitfolge  $[x_1, \dots, x_n]$  fester Länge
- Phänotyp: Belegung  $b = \{(v_1, x_1), \dots, (v_n, x_n)\}$
- Fitness: z. B. Anzahl der von  $b$  erfüllten Klauseln
- Operatoren:
  - Mutation: einige Bits ändern
  - Kreuzung: one/two-point crossover?  
Problem: starke Abhängigkeit von Variablenreihenfolge

## Lokale Suche (GSat, Walksat)

Bart Selman, Cornell University, Henry Kautz, University of Washington

<https://web.archive.org/web/20070311005144/http://www.cs.rochester.edu/u/kautz/walksat/>

Algorithmus:

- beginne mit zufälliger Belegung
- wiederhole: ändere das Bit, das die Fitness am stärksten erhöht

Problem: lokale Optima — Lösung: Mutationen.

## DPLL

Davis, Putnam (1960), Logeman, Loveland (1962), <http://dx.doi.org/10.1145/321033.321034> <http://dx.doi.org/10.1145/368273.368557>

Zustand = partielle Belegung

- *Decide*: eine Variable belegen
- *Propagate*: alle Schlußfolgerungen ziehen  
Beispiel: Klausel  $x_1 \vee x_3$ , partielle Belegung  $x_1 = 0$ ,  
Folgerung:  $x_3 = 1$
- bei *Konflikt* (widersprüchliche Folgerungen)
  - (DPLL original) Backtrack (zu letztem Decide)
  - (DPLL mit CDCL) Backjump (zu früherem Decide)

## DPLL-Begriffe

für partielle Belegung  $b$  (Bsp:  $\{(x_1, 1), (x_3, 0)\}$ ): Klausel  $c$  ist

- *erfüllt*, falls  $\exists l \in c : b(l) = 1$ , Bsp:  $(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$
- *Konflikt*, falls  $\forall l \in c : b(l) = 0$ , Bsp:  $(\neg x_1 \vee x_3)$
- *unit*, falls  $\exists l \in c : b(l) = \perp \wedge \forall l' \in (c \setminus \{l\}) : b(l') = 0$ ,  
Bsp:  $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$ . Dabei ist  $l = \neg x_2$  das Unit-Literal.
- *offen*, sonst. Bsp:  $(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ .

Eigenschaften: für CNF  $F$  und partielle Belegung  $b$ :

- wenn  $\exists c \in F : c$  ist Konflikt für  $b$ , dann  $\neg \exists b' \supseteq b$  mit  $b' \models F$   
(d.h., die Suche kann dort abgebrochen werden)
- wenn  $\exists c \in F : c$  ist Unit für  $b$  mit Literal  $l$ , dann  $\forall b' \supseteq b : b' \models F \Rightarrow b'(l) = 1$   
(d.h.,  $l$  kann ohne Suche belegt werden)

## DPLL-Algorithmus

Eingabe: CNF  $F$ , Ausgabe: Belegung  $b$  mit  $b \models F$  oder UNSAT.

DPLL( $b$ ) (verwendet Keller für Entscheidungspunkte):

- (success) falls  $b \models F$ , dann halt (SAT), Ausgabe  $b$ .
- (backtrack) falls  $F$  eine  $b$ -Konfliktklausel enthält, dann:
  - falls Keller leer, dann halt (UNSAT)
  - sonst  $v := \text{pop}()$  und DPLL( $b_{<v} \cup \{(v, 1)\}$ ).dabei ist  $b_{<v}$  die Belegung *vor*  $\text{decide}(v)$
- (propagate) falls  $F$  eine  $b$ -Unitklausel  $c$  mit Unit-Literal  $l$  enthält: DPLL( $b \cup \{(\text{variable}(l), \text{polarity}(l))\}$ )
- (decide) sonst wähle  $v \notin \text{dom } b$ , push( $v$ ), und DPLL( $b \cup \{(v, 0)\}$ ).

## DPLL: Eigenschaften

- Termination: DPLL hält auf jeder Eingabe
- Korrektheit: wenn DPLL mit SAT hält, dann  $b \models F$ .
- Vollständigkeit: wenn DPLL: UNSAT, dann  $\neg \exists b : b \models F$

wird bewiesen durch Invariante

- $\forall b' : b' \in \text{Mod}(F) \Rightarrow b \leq_{\text{lex}} b'$   
(wenn DPLL derzeit  $b$  betrachtet, und wenn  $F$  ein Modell  $b'$  besitzt, dann ist  $b'$  unterhalb oder rechts von  $b$ )
- dabei bedeutet:  $b \leq_{\text{lex}} b'$ :  
 $b \subseteq b'$  oder  $\exists v : b(v) = 0 \wedge (b_{<v} \cup \{(v, 1)\}) \subseteq b'$

Satz (Ü): für alle endlichen  $V$ :  $<_{\text{lex}}$  ist eine wohlfundierte Relation auf der Menge der partiellen  $V$ -Belegungen:

### DPLL-Beispiel

$[[2, 3], [3, 5], [-3, -4], [2, -3, -4]$   
 $, [-3, 4], [1, -2, -4, -5], [1, -2, 4, -5]]$

decide belegt immer die kleinste freie Variable, immer zunächst negativ

### DPLL-Beispiel (Lösung)

$[[2, 3], [3, 5], [-3, -4], [2, -3, -4]$   
 $, [-3, 4], [1, -2, -4, -5], [1, -2, 4, -5]]$

[Dec (-1), Dec (-2), Prop 3, Prop (-4), Back  
, Dec 2, Dec (-3), Prop 5, Prop (-4), Back  
, Dec 3, Prop (-4), Back, Back, Back  
, Dec 1, Dec (-2), Prop 3, Prop (-4), Back  
, Dec 2, Dec (-3), Prop 5]

### DPLL: Implement., Heuristik, Ergänzungen

- Grundlage ist effiziente Impl. von UP und Konflikt-Erkennung
- Methoden:
  - Wahl der nächsten Entscheidungsvariablen  
(kommt am häufigsten in aktuellen Konflikten vor)
  - Lernen von Konflikt-Klauseln (erlaubt Backjump)
  - Vorverarbeitung (Variablen und Klauseln eliminieren)

- alles vorbildlich implementiert und dokumentiert in Minisat <http://minisat.se/> (Niklas Een, Niklas Sorenson) (seit ca. 2005 sehr starker Solver)  
später übernimmt diese Rolle: Cadical, Kissat <https://fmv.jku.at/kissat/> (Armin Biere)

## Aufgaben

1. Geben Sie eine erfüllbare CNF an, für die monotone lokale Suche

```
improve n cnf b0 = ...
  let b1 = S.insert (negate l) $ S.delete l b0
  if badness cnf b1 <= badness cnf b0
  then improve n cnf b1
  else improve n cnf b0
```

nicht funktioniert: es gibt eine Belegung  $b_0$ , von der aus *keine* zulässige Schrittfolge zu einer erfüllenden Belegung führt. Hinweis: z.B., weil es überhaupt keine erlaubten Schritte gibt.

Wie behandeln gsat/walksat diesen Fall?

2. wenden Sie den SAT-Solver mit lokaler Suche auf realistische CNFs an, z.B. aus Kodierung Rösselsprung.
3. wie werden in minisat (kissat, ...) Einheits- und Konfliktklauseln erkannt? (Hinweis: two watched literals)
4. unit propagation (UP) implementieren:

- Einheitsklauseln erkennen:

```
type Literal = Int
units :: CNF -> [Literal]
units [[1,2], [-3], [3,4]] = [-3]
```

- ein Literal belegen:

```
assign :: Literal -> CNF -> CNF
assign (-3) [[1,2], [-3], [3,4]] = [[1,2], [4]]
```

Wo stehen die entsprechenden Funktionen im Quelltext der Autotool-Aufgabe zu DPLL?

## 7 Bit-Blasting für Arithmetik

### Bausteine für Zahlenrechnungen

- halfAdder  
:: Bit -> Bit -> (Bit, Bit)  
halfAdder x y = (xor x y, x && y)
- fullAdder  
:: Bit -> Bit -> Bit -> (Bit, Bit)  
fullAdder x y z =  
let (s1, c1) = halfAdder x y  
    (s2, c2) = halfAdder \_ \_  
in (\_ , \_)

### Praktische Eigenschaften von Kodierungen (I)

- für CNF  $F$  auf Variablen  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ :  
Definition:  $F$  erkennt Widersprüche durch UP (unit prop.):  
für jede partielle Belegung  $b$  gilt:  
wenn keine vollst. Belegung  $b' \supseteq b$  existiert mit  $b' \models F$ ,  
dann führt UP auf  $F$  von  $b$  aus zu einem Konflikt
- Bsp:  $F = \{123, \overline{12}, \overline{123}, 2\overline{3}, \overline{23}\}$ ,  $b = \{\overline{1}\}$ .
- Ü: gilt diese Eigensch. für Produkt-Kodierung von AMO?  
Zu betrachten ist, ob für jede Belegung  $b = \{(x_i, 1), (x_j, 1)\}$  durch UP ein Konflikt erreicht wird.

### Praktische Eigensch. (II) – Forcing

- für CNF  $F$  auf Variablen  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und evtl. Hilfsvariablen  $H$ :  
Def.:  $F$  ist (generalized) arc-consistent (GAC) (forcing):  
für jede partielle Belegung  $b$  mit  $\text{dom } b \subseteq V$   
und jedes  $v \in V$  mit  $v \notin \text{dom } b$ :  
wenn  $v$  in allen Modellen  $b' \supseteq b$  von  $F$  den gleichen Wert hat, dann folgt dieser Wert bereits durch UP.

- Bsp: Produkt-Kodierung von  $\text{AMO}(x)$ : Betrachte  $b = \{(x_i, 1)\}$ .  
Alle anderen  $x_j$  müssen dann falsch sein.  
Wird das durch UP erreicht?

## Aufgaben

1. Ist die Kodierung des Halb-Addierers  $\text{HA}(x, y; c, r)$  durch  $(r \leftrightarrow x \oplus y) \wedge (c \leftrightarrow x \wedge y)$  (Tseitin-Kodierung ohne weitere Hilfsvariablen) forcing?  
Ist die Kodierung des Voll-Addierers  $\text{FA}(x, y, z; c, r)$  durch  $\text{HA}(x, y; c_1, r_1) \wedge \text{HA}(r_1, z; c_2, r) \wedge (c \leftrightarrow c_1 \vee c_2)$  forcing?  
Desgl. für die Kodierung von  $\text{ITE}(i, t, e; x)$  (if-then-else) durch  $(i \wedge t \rightarrow x) \wedge (i \wedge \bar{t} \rightarrow \bar{x}) \wedge (\bar{i} \wedge e \rightarrow x) \wedge (\bar{i} \wedge \bar{e} \rightarrow \bar{x})$   
Lesen Sie dazu auch Een und Sörenson: *Translating Pseudo-Boolean Constraints into SAT*, JSAT 2006, (<http://minisat.se/Papers.html>) Abschnitt 5.1.  
Vergleichen Sie mit den Quelltexten von ersatz.

## Binärzahlen, Vergleich, Addition

- in Ersatz: `data Bits = Bits [Bit]`, beginnt mit LSB!
- Ordnung (Ü: fehlende Fälle in eq, Ü: Orderable)

```
instance Equatable Bits where
  Bits xs === Bits ys = eq xs ys where
    eq [] [] = true
    eq (x:xs) (y:ys) = (x === y) && eq xs ys
```

- Addition (Ü: fehlende Fälle in add) Formelgröße linear

```
instance Num Bits where
  Bits xs + Bits ys = Bits $ add false xs ys where
    add cin (x:xs) (y:ys) =
      let (s,cout) = fullAdder cin x y
      in s : add cout xs ys
```

### Anw.: Rösselsprung (alternative Kodierung)

- Neng-Fa Zhou: ... Efficient SAT Encoding for the Hamiltonian Cycle Problem, CP 2020, ModRef 2019, <https://www.sci.brooklyn.cuny.edu/~zhou/>
- für jedes Feld  $p$  des Schachbretts eine unbekannte Zahl  $t_p$ , die den Zeitpunkt angibt, zu dem  $p$  besucht wird.
- Hamiltonkreis/pfad in  $G = (V, E)$  wird erzwungen durch
$$\forall p \in V : \exists q \in V : pq \in E \wedge (t_p + 1 = t_q)$$
(Vorsicht: das ist nur die Idee, muß modifiziert werden)
- $t_p$  binär repräsentiert, Nachfolger binär implementiert.
- im Vgl. zu Kodierung mit Permutationsmatrix (früher): weniger Variablen/Klauseln, aber schwerer lösbar

### Binäre Multiplikation

$$[x_0, \dots]_2 \cdot [y_0, \dots]_2 = [z_0, \dots]_2,$$

- Schulmethode:  $z = \sum 2^i \cdot x_i \cdot y$  (sequentielle Summation)
- Verbesserungen: C.S. Wallace (1964), L. Dadda (1965),  
benutze *full-adder* für *verschränkte* Summation,  
(ähnlich zu carry-save-adder)  
verringert Anzahl der Gatter und Tiefe des Schaltkreises  
vgl. Townsend et al.: *A Comparison of...*, 2003 <http://www.cerc.utexas.edu/~whitney/pdfs/spie03.pdf>,
- scheint für CNF-Kodierung wenig zu helfen  
Testfall: Faktorisierung.

### Anwendung: Anzahl-Constraints

- wir kennen: exactly/at-most-one
- wir wünschen: exactly/at-most- $k$

- (jetzt) triviale Lösung: die Bits binär addieren  
aber in der passenden Klammerung (balancierter Additionsbaum), damit die Bitbreite des Resultats vernünftig ist  
so realisiert in `Ersatz.Counting`
- geht das besser? ( $\Rightarrow$  Bachelorarbeit (wenigstens))

### Ausblick: Prädikatenlogik, SMT

- Binärkodierung ist ein Beispiel für *bit blasting*
- dieses Verfahren zerstört semantische Information, diese muß (vom SAT-Solver) teuer rekonstruiert werden, Bsp.

```
x <- unknown 10; y <- unknown 10
assert $ x * y /= y * x -- > 1 min für UNSAT
```

- semantische Eigenschaften (Assoz., Kommut., Distr.) arithemischer Operatoren können durch Solver nur verwendet werden, wenn Constraint-System diese Operatoren tatsächlich benutzt
- dazu wird Prädikatenlogik benötigt (boolesche Kombination von atomaren Constraints, diese sind Relationen auf Termen)

### Aufgaben

WS24: empfohlen: 1, 5, 3

1. zu „alternative Kodierung Rösselsprung“: welches Constraint-System entsteht, wenn die unbekanntes  $t_p$  one-hot-kodiert werden?
2. ist Implementierung von `atmost-1`, `atmost-k` durch binäre Addition forcierend?
3. für Binärzahlen (Typ `Bits`): implementieren Sie
  - `min`, `max`
  - Vorgänger (`:: Bits -> (Bits, Bit)`), zusätzlich ein Bit, das Unterlauf anzeigt, d.h., falls `Argument = 0`)
  - Auswahl (`if-then-else :: Bit -> Bits -> Bits -> Bits`)

4. Kodierung von vorzeichenbehafteten Zahlen (mit variabler Bitbreite): zur Basis -2,  
Bsp.  $-5 = 1 - 2 + 4 - 8 = 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^3$

Instanzen für Ersatz (Codec, Equatable, Orderable, Num)

5. benutzen Sie `microsat` (Repo dieser VL) (evtl. passend modifiziert), um experimentell zu überprüfen:

- Konflikt wird durch UP erkannt?

```
x <- unknown 10; y <- unknown 10
assert $ x + y /= y + x
```

- Lösung wird durch UP bestimmt?

```
x <- unknown 10;
assert $ encode 13 + x == encode 31
```

ähnlich für Multiplikation

## 8 Prädikatenlogik

### Übersicht

- 1. Prädikatenlogik (Syntax, Semantik)
- 3. existentielle konjunktive Constraints  
in verschiedenen Bereichen, z. B.  
Gleichungen und Ungleichungen auf Zahlen ( $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ )
- existentiell mit beliebigen Boolesche Verknüpfungen:
  2. hinschreiben: SAT modulo  $T$  (= SMT),
  4. lösen: DPLL( $T$ )
- 0. Bit-blasting (SMT  $\rightarrow$  SAT)
- 5. volle Prädikatenlogik (auch universelle Quant.)

### Syntax der Prädikatenlogik

- Signatur: Name und Stelligkeit für

- Funktions-
- und Relationssymbole
- Term:
  - Funktionssymbol mit Argumenten (Terme)
  - Variable
- Formel
  - atomar: Relationssymbol mit Argumenten (Terme)
  - Boolesche Verknüpfungen (von Formeln)
  - Quantor Variable Formel
- – gebundenes und freies Vorkommen von Variablen
  - Sätze (= geschlossene Formeln)

### **Semantik der Prädikatenlogik**

- Universum, Funktion, Relation,
- Struktur, die zu einer Signatur paßt
- Belegung, Interpretation
- Wert
  - eines Terms
  - einer Formel

in einer Struktur, unter einer Belegung

die Modell-Relation  $(S, b) \models F$  sowie  $S \models F$   
 Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit (Def, Bsp)

## 9 SMT (SAT modulo Theory)

### Beispiel

- $P > 0 \wedge Q \geq 0 \wedge R > 0 \wedge S \geq 0 \wedge P \cdot S + Q > R \cdot Q + S$
- ```
(set-logic QF_NIA) (set-option :produce-models true)
(declare-fun P () Int) (declare-fun Q () Int)
(declare-fun R () Int) (declare-fun S () Int)
(assert (and (< 0 P) (<= 0 Q) (< 0 R) (<= 0 S)))
(assert (> (+ (* P S) Q) (+ (* R Q) S)))
```

<https://smt-lib.org/language.shtml>
- ```
setLogic "QF_NIA"
[p,q,r,s] <- replicateM 4 $ var @IntSort
assert $ p >? 0 && q >=? 0 && r >? 0 && s >=? 0
assert $ p * s + q >? r * q + s
```

<https://hackage.haskell.org/package/hasmtlib>

### Bitvektor-Logik (QF\_BV)

- Grundbereich: Bitfolgen (mit fixierte Länge  $w$ ),  
arithmetische Operationen *modulo*  $2^w$
- mögliche Implementierung: bit-blasting
- Solver benutzt zusätzlich Aussagen und Umformungs-Regeln für Arithmetik
- Bsp: Laufzeit (vgl. mit bit-blasting, vorige Woche)

```
setLogic "QF_BV"
[x,y] <- replicateM 2 $ var @(BvSort Unsigned 100)
assert $ not $ x + y === y + x
```

- Ü/Vorsicht: `assert $ x /== 0 && 13 * x === x`

### Definition SMT, Lösungsverfahren (Plan)

- SMT: Erfüllbarkeitsproblem für beliebige boolesche Kombination von atomaren Formeln aus einer Theorie  
Beispiel:  $(x \geq 3 \vee \neg(x + y \leq 4)) \leftrightarrow x > y$

- Verfahren: 1. (wirklich) ersetze jedes T-Atom  $a_i$  durch eine boolesche Unbekannte  $u_i$ , erhalte Formel  $F$
  - 2. (naiv) für jedes boolesche Modell  $b \models F$ : entscheide, ob die Konjunktion der entsprechenden (ggf. negierten) Atome in T erfüllbar ist
  - (2. besser) *DPLL modulo Theory*: Verschränkung der booleschen Suche mit T-Erfüllbarkeit für partielle Modelle
- Hilfsmittel dabei: Tseitin (ähnliche) Transformation

## SMT-{LIB,COMP}

- Standard-Modellierungssprache, Syntax/Semantik-Def:  
<https://smtlib.cs.uiowa.edu/standard.shtml>
- Aufgabensammlung: <https://smtlib.cs.uiowa.edu/benchmarks.shtml>  
Kombinatorik, Scheduling, Hard- und Software-Verifikation, ...crafted, industrial, (random?)
- Wettbewerb: <https://smt-comp.github.io/>
- typische Solver (Beispiele)
  - Z3 (Nikolas Bjorner, Leo de Moura et al.) <https://github.com/Z3Prover/z3/>
  - CVC5 (Clark Barrett, Cesare Tinelli et al.) <https://cvc5.github.io/>

## Beispiel queen10-1.smt2 aus SMT-LIB

```
(set-logic QF_IDL) (declare-fun x0 () Int)
(declare-fun x1 () Int) (declare-fun x2 () Int)
(declare-fun x3 () Int) (declare-fun x4 () Int)
(assert (let ((?v_0 (- x0 x4)) (?v_1 (- x1 x4))
              (?v_2 (- x2 x4)) (?v_3 (- x3 x4)) (?v_4 (- x0 x1))
              (?v_5 (- x0 x2)) (?v_6 (- x0 x3)) (?v_7 (- x1 x2))
              (?v_8 (- x1 x3)) (?v_9 (- x2 x3))) (and (<= ?v_0 3)
              (>= ?v_0 0) (<= ?v_1 3) (>= ?v_1 0) (<= ?v_2 3) (>=
              ?v_2 0) (<= ?v_3 3) (>= ?v_3 0) (not (= x0 x1))
              (not (= x0 x2)) (not (= x0 x3)) (not (= x1 x2))
              (not (= x1 x3)) (not (= x2 x3)) (not (= ?v_4 1))
              (not (= ?v_4 (- 1))) (not (= ?v_5 2)) (not (= ?v_5
```

```
(- 2))) (not (= ?v_6 3)) (not (= ?v_6 (- 3))) (not
(= ?v_7 1)) (not (= ?v_7 (- 1))) (not (= ?v_8 2))
(not (= ?v_8 (- 2))) (not (= ?v_9 1)) (not (= ?v_9
(- 1)))))) (check-sat) (exit)
```

## Umfang der Benchmarks (2014)

<http://www.cs.nyu.edu/~barrett/smtlib/?C=S;O=D>

QF_BV_DisjunctiveScheduling.zip	2.7G
QF_IDL_DisjunctiveScheduling.zip	2.4G
incremental_Hierarchy.zip	2.1G
QF_BV_except_DisjunctiveScheduling.zip	1.6G
QF_IDL_except_DisjunctiveScheduling.zip	417M
QF_LIA_Hierarchy.zip	294M
QF_UFLRA_Hierarchy.zip	217M
QF_NRA_Hierarchy.zip	170M
QF_LRA_Hierarchy.zip	160M

- QF: quantifier free,
- I: integer, R: real, BV: bitvector
- D: difference, L: linear, N: polynomial

## Anwendung zur Terminations-Analyse

- der *arktische* Halbring:  $\mathbb{A} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{N}, \max, +, -\infty, 0)$
- $\mathbb{A}^{d \times d}$ : quadratische Matizen über  $\mathbb{A}$ ,
- $P > Q$  falls  $\forall i, j : (P_{i,j} > Q_{i,j}) \vee (P_{i,j} = -\infty = Q_{i,j})$ .
- Matrix-Interpretation:  $i : \Sigma \rightarrow \mathbb{A}^{d \times d}$  mit  $\forall c : i(c)_{1,1} \geq 0$   
Interpretation von Wörtern:  $i(c_1 \dots c_n) := i(c_1) \circ \dots \circ i(c_n)$   
Bsp:  $i : a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix}$
- $i$  kompatibel mit  $R$ , falls  $\forall (l, r) \in R : i(l) > i(r)$ .  
Bsp (Fortsetz.)  $i$  kompatibel mit  $\{aa \rightarrow aba\}$
- dann terminiert  $R$ , denn jede  $R$ -Ableitung von  $w$  aus hat  $\leq i(w)_{1,1}$  Schritte
- für gegebenes  $R$  und  $d$ : Kompatibilität von  $i$  ist Constraint-System in QF\_LIA.

## e-DSLs für Constraint-Prog.

- die Constraint-Sprache  $C$  dient zur Kommunikation mit Solver (nicht: mit Anwender/Anwendungsprogrammierer)
- Programm in einer Gastsprache  $G$  für
  - Konstruktion des Constraint-Systems
  - Verarbeitung des Resultates (des Modells)
- dabei müssen übersetzt werden
  - Namen in  $C$ , Namen in  $G$
  - Werte in  $C$  (symbolisch), Werte in  $G$  (tatsächlich)
  - Typen in  $C$  (Bsp: `Bit`), in  $G$  (Bsp: `Bool`)
- Entwurfs-Ziele:
  - symbolisches Programm (in  $C$ ) sieht aus wie tatsächliches Programm (in  $G$ )
  - notwendige Übersetzungen möglichst unsichtbar

## Wiederholung: ersatz als e-DSL für SAT

- ```
(let b = True in solveWith minisat $ do
  p <- exists @Bit; assert (p == encode b)
  return p
) >>= \ case (Satisfied, Just (p :: Bool)) -> ...
```
- ```
class Codec c where
  type Decoded c
  encode :: Decoded c -> c
  decode :: Belegung -> c -> Decoded c
instance Codec Bit where
  type Decoded Bit = Bool; ...
```
- Ü: überprüfen Sie die Design-Ziele, geben Sie die technischen Mittel an, durch die diese erreicht werden

## Beispiel: Python-Bindung für Z3

- <https://github.com/Z3Prover/z3/blob/master/examples/python/hamiltonian/hamiltonian.py>

```
L = {0:[1,2], 1:[2], 2:[1,0]} # Beispiel-Graph
cv = [Int('cv%s'%i) for i in range(L)]
s = Solver() ; s.add(cv[0]==0)
for i in range(L):
    s.add(Or([cv[j]==(cv[i]+1)%L for j in gr[i]]))
s.check(); print (s.model())
```

- Design-Ziele überprüfen:
  - Namen, Typen, Ausdrücke, Übersetzungen, Sichtbarkeit
- beachte: hier wird keine SMTLIB-Datei erzeugt, sondern API des Solvers aufgerufen.

## Haskell-Bindungen für SMTLIB (Bsp. 1)

- Iavor S. Diatchki: <https://hackage.haskell.org/package/simple-smt>
- ```
s <- newSolver "cvc4" ["--lang=smt2"] Nothing
setLogic s "QF_LIA"
x <- declare s "x" tInt
assert s (add x (int 2) `eq` int 5)
check s
print =<< getExprs s [x]
```
- *C*-Namen sind sichtbar
- *C*-Typen (*tInt*) erscheinen nicht statisch in *G*-Typen
- *C*- und *G*-Operatoren: `add`, `+`
- explizite Rück-Übersetzung (`getExprs`)

## Haskell-Bindungen für SMTLIB (Bsp. 2)

- Henning Günther: <https://hackage.haskell.org/package/smtlib2>

- ```
withBackend (createPipe "z3" ["-smt2","-in"]) $ do
  x <- declareVar int; y <- declareVar int
  assert $ x .+. y .==. cint 5
  assert $ x .>. cint 0; assert $ y .>. cint 0
  checkSat
  IntValue vx <- getValue x; IntValue vy <- getValue y
  return (vx,vy)
```

- *C*-Typen erscheinen statisch in *G*-Typen, Bsp:

```
(.>.) :: (Embed m e, IsSMTNumber tp, HasMonad a, HasMonad b
, MatchMonad a m, MatchMonad b m
, MonadResult a ~ e tp, MonadResult b ~ e tp)
=> a -> b -> m (e BoolType)
```

## Haskell-Bindungen für SMTLIB (Bsp. 3)

- Julian Bruder: Hasmtlib <https://hackage.haskell.org/package/hasmtlib>  
... encoding your problem, marshaling the data to an external solver and parsing and interpreting the result into Haskell types. It is highly inspired by ekmett/ersatz

- ```
res <- solveWith @SMT (solver z3) $ do
  setLogic "QF_NIA"
  [p,q,r,s] <- replicateM 4 $ var @IntSort
  assert $ p >? 0 && q >=? 0 && r >? 0 && s >=? 0
  assert $ p * s + q >? r * q + s
  return [p,q,r,s]
print res
```

## Aufgaben

1. für jede der Logiken QF-LIA, LRA, NIA: ein kleines Constraint-System (mit kleinen Koeffizienten) angeben, das erfüllbar ist, aber nur durch Modelle mit sehr großen Zahlen.
2. Bestimmen Sie:

die kleinste natürliche Zahl, die sich auf zwei verschiedene Weisen als Summe von zwei Kuben schreiben läßt

mit einem SMT-Solver. Schreiben Sie das Constraint-System von Hand. Benutzen Sie Logiken  $\mathcal{QF\_NIA}$  (Polynom-Arithmetik) (Warum nicht  $\mathcal{QF\_LRA}$ ?)

Hinweis: die Bedingung *die kleinste* kann man nicht hinschreiben, aber durch systematisches Probieren realisieren

3. die vorige Aufgabe mit  $\mathcal{QF\_BV}$  (Bitvektoren). Dabei müssen Überläufe durch weitere Constraints verhindert werden. Wie geht das?

4. Dieses Beispiel in  $\mathcal{QF\_NIA}$  ist wohl zu schwer für heutige Solver:

Andrew R. Booker, Andrew V. Sutherland: *On a question of Mordell*, <https://arxiv.org/abs/2007.01209>

John Pavlus: *Sum-of-Three-Cubes Problem Solved for 'Stubborn' Number 33*, <https://www.quantamagazine.org/sum-of-three-cubes-problem-solved-for-stubb>

5. wählen Sie zufällig in SMTLIB eine (quantorenfreie) Logik und dort eine Benchmark. Erklären Sie die Benchmark.

Beispiel: Queens (siehe Folie)

Wenden Sie verschiedene SMT-Solver an (z.B. Z3, CVC5, opensmt) und vergleichen Sie Laufzeiten.

Ändern Sie die Formel (vorsichtig), erläutern Sie die Änderungen der Belegung oder Erfüllbarkeit.

Erzeugen Sie das Constraint durch Hasmtlib.

6. die zitierte Hamiltonkreis-Kodierung (oder die früher zitierte MIP-Kodierung dafür) in SMTLIB-Syntax hinschreiben (in möglichst einfacher Logik) und ausprobieren.

7. Eine kompatible arktische Matrix-Interpretation für  $aa \rightarrow aba$  (das Bsp. auf Folie) durch Lösen eines LIA-Systems bestimmen  
 Desgl. für  $a^2b^2 \rightarrow b^3a^3$  (größere Dimension verwenden).  
 Warum gibt es keine solche Interpretation für  $ab \rightarrow ba$ ?  
 Hinweis: weil diese Regel quadratische lange Ableitungen gestattet (von welchen Startwörtern?),  
 aber solche können bei arktischen Interpretationen nicht vorkommen (warum?)
8. Adventskalender der DMV <https://www.mathekalender.de/wp/de/kalender/>  
 Wenden Sie SAT oder SMT an, um Aufgaben zu modellieren und zu lösen.

## 10 DPLL(T) (Modulo Theories)

### DPLL(T), Prinzip

für jedes T.Atom  $A = P(t_1, \dots, t_k)$  eine boolesche Unbek.  $p_A \leftrightarrow A$ .

- naives Vorgehen:
  - für jede Lösung des SAT-Problem für diese Variablen  $p_*$ :
  - bestimme Erfüllbarkeit dieser Konjunkt. von T-Literalen
- Realisierung mit DPLL(T):
  - decide,  $T$ -solve (Konjunktion von  $T$ -Literalen)
  - Konflikte (logische und  $T$ -Konfl.): backtrack
  - logische Propagationen, Lernen
  - $T$ -Propagation ( $T$ -Deduktion)

### DPLL(T): Datenmodell, Semantik für Formel

- Theorie ist: lineare Ungleichungen über  $\mathbb{Q}$
- Formel  $\in$  CNF(T) = Konjunkt. v. Disjunkt. von Literalen

```

data Atom = Theory_Atom ( FM.Atom Variable )
           | Boolean_Atom Variable
data Literal =
  Literal { polarity :: Bool, atom :: Atom }
type Clause = [ Literal ]
type CNF = [ Clause ]

```

- Beispiel:  $b \leq x \wedge c \leq x \wedge (b \geq x \vee c \geq x)$

```

[ [ 0 <= -1 * b + x ]
  , [ 0 <= -1 * c + x ]
  , [ 0 <= + b -1 * x, 0 <= + c -1 * x ] ]

```

- Beschreibung, Test, Verbesserung : Bachelor-Arbeit

### DPLL(T): Datenmodell, Semantik für Lösung

- Zustand d. Beweis-Suche (wie DPLL): Menge (Konjunktion)  $b$  v. Literalen, Keller  $k$  v. Entscheidungen
- Lösung ist Schrittfolge, jeder Schritt ändert Zustand

```

data Step = Decide Literal
          | Conflict Conflict | Backtrack
          | Propagate { use :: Conflict, obtain :: Literal }
          | SAT          | UNSAT

```

- neu (für DPLL(T)): Theorie-Konflikte.

```

data Conflict = Boolean Clause | Theory

```

- Propagation (Wdhlg.) ist eine Entscheidung  $p$  (Belegung eines Atoms), deren Gegenteil  $\neg p$  einen Konflikt  $c$  erzeugt  
wenn  $(b \wedge \neg p) \not\models c$ , dann  $(b \wedge c) \Rightarrow p$ .

### DPLL(T): Einzelheiten, Beispiele

- Literatur: Robert Nieuwenhuis et al.: <https://www.cs.upc.edu/~roberto/papers/IJCAR2012Slides.pdf>

- Univ. Barcelona, Spin-Off: Barcelogic, Bsp:

<https://barcelogic.com/en/sports-planning/>

... software for professional sports scheduling. It has been successfully applied during the last five years in the Dutch professional football (the main KNVB Ere- and Eerste Divisies).

An adequate schedule is not only important for sportive and economical fairness among teams and for public order. It also plays a very important role reducing costs and increasing revenues, e.g., the value of TV rights.

## 11 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

### Beispiel LP: monotone Interpretation

- Beispiel: das Wortersetzungssystem  $R = \{aa \rightarrow bbb, bb \rightarrow a\}$  terminiert.
- Beweis: definiere  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{N} : a \mapsto 5, b \mapsto 3$   
und setze fort zu  $h^* : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N} : h(c_1 \dots c_n) = \sum h(c_i)$ .  
Dann gilt  $u \rightarrow_R v \Rightarrow h^*(u) > h^*(v)$  wegen  $\forall (l \rightarrow r) \in R : h^*(l) > h^*(r)$ .
- Die Gewichtsfunktion  $h$  erhält man als Lösung des linearen Ungleichungssystems  $2a > 3b \wedge 2b > a \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0$ .

### Beispiel LP-Solver

- Aufgabenstellung im LP-Format (<http://lpsolve.sourceforge.net/5.0/CPLEX-format.htm>)

```
Minimize
  obj: a + b
Subject To
  c1: 2 a - 3 b >= 1
  c2: 2 b - a >= 1
End
```

- lösen mit `glpsol` (GNU Linear Programming Kit, <https://www.gnu.org/software/glpk/>, 2000-2020, Andrew Makhorin)

```
glpsol --lp lin/lpex.cplex
```

## Syntax, Semantik

- lin. (Un-)Gleichungssystem  $\rightarrow \bigwedge_{i=1}^n$  Constraint
- Constraint  $\rightarrow$  Ausdruck Relsym Ausdruck
- Relsym  $\rightarrow = \mid \leq \mid \geq$
- Ausdruck  $\rightarrow$  Zahl  $+$   $\sum_{i=1}^n$  (Zahl  $\cdot$  Unbekannte)
- Zahlenbereich:  $\mathbb{Q}$  (rational)

Beispiel:  $4y \leq x \wedge 4x \leq y - 3 \wedge x + y \geq 1 \wedge x - y \geq 2$

Semantik: Wertebereich für Unbekannte ist  $\mathbb{Q}$  (äquiv:  $\mathbb{R}$ )

## Normalformen

- Beispiel:

$$4y \leq x \wedge 4x \leq y - 3 \wedge x + y \geq 1 \wedge x - y \geq 2$$

- Normalform:  $\bigwedge_i \sum_j a_{i,j} x_j \geq b_i$

$$x - 4y \geq 0$$

...

- Matrixform:  $Ax^T \geq b^T$

$A$  ist linearer Operator.

Lösung von linearen (Un-)Gl.-Sys. mit Methoden der linearen Algebra

## Hintergründe

Warum funktioniert das alles?

- lineares Gleichungssystem:

Lösungsmenge ist (verschobener) *Unterraum*, endliche Dimension

- lineares Ungleichungssystem:

Lösungsmenge ist *Simplex* (Durchschnitt von Halbräumen, konvex), endlich viele Seitenflächen

Wann funktioniert es nicht mehr?

- nicht linear: keine Ebenen
- nicht rational, sondern ganzzahlig: Lücken

## Lineare Gleichungssysteme

- Lösung nach Gauß-Verfahren:  
eine Gleichung nach einer Variablen umstellen,  
diese Variable aus den anderen Gleichungen eliminieren (= Dimension des Lösungsraumes verkleinern)
- Ü: es gibt kein solches Verfahren für CNF-SAT (es gibt keine Operation, die der Subtraktion entspricht)  
... aber für XOR-SAT (Konjunktion von XOR-Klauseln)
- Mate Soos, Karsten Nohl, Claude Castelluccia: *Extending SAT Solvers to Cryptographic Problems SAT 2009* <https://github.com/msoos/cryptominisat>  
... we extended the solver's input language to support the XOR operation

## Lineare Ungleichungen und Optimierung

Entscheidungsproblem:

- Eingabe: Constraintsystem,
- gesucht: eine erfüllende Belegung

Optimierungsproblem:

- Eingabe: Constraintsystem und *Zielfunktion* (linearer Ausdruck in Unbekannten)
- gesucht: eine optimale erfüllende Belegung (d. h. mit größtmöglichem Wert der Zielfunktion)

Standard-Form des Opt.-Problems:  $A \cdot x^T = b, x^T \geq 0$ , minimiere  $c \cdot x^T$ .

Ü: reduziere OP auf Standard-OP, reduziere EP auf OP

## Lösungsverfahren für lin. Ungl.-Sys.

- Simplex-Verfahren (für OP) (George Dantzig et al., 1947)  
Schritte wie bei Gauß-Verfahren für Gleichungssysteme (= entlang einer Randfläche des Simplex zu einer besseren Lösung laufen)  
Einzelheiten siehe Vorlesung Numerik/Optimierung  
exponentielle Laufzeit im schlechtesten Fall (selten)

- polynomielle Algorithmen: Leonid Kachiyan, 1979, Narendra Karmakar 1984.
- Fourier (1826)-Motzkin (1936)-Verfahren (für EP)  
vgl. mit Elimination durch vollständige Resolution  
exponentielle Laufzeit (häufig)

### Fourier-Motzkin-Verfahren

Def.: eine Ungl. ist in  $x$ -Normalform, wenn jede Ungl.

- die Form „ $x$  ( $\leq$  |  $\geq$ ) (Ausdruck ohne  $x$ )“ hat
- oder  $x$  nicht enthält.

Satz: jedes Ungl. besitzt äquivalente  $x$ -Normalform.

Def: für Ungl.  $U$  in  $x$ -Normalform:

$$U_x^\downarrow := \{A \mid (x \geq A) \in U\}, U_x^\uparrow := \{B \mid (x \leq B) \in U\},$$

$$U_x^- = \{C \mid C \in U, C \text{ enthält } x \text{ nicht}\}.$$

Def: ( $x$ -Eliminations-Schritt) für  $U$  in  $x$ -Normalform:

$$U \rightarrow_x \{A \leq B \mid A \in U_x^\downarrow, B \in U_x^\uparrow\} \cup U_x^-$$

Satz: ( $U$  erfüllbar und  $U \rightarrow_x V$ )  $\iff$  ( $V$  erfüllbar).

FM-Verfahren: Variablen nacheinander eliminieren.

### Fourier-Motzkin: Datenmodell lineare Fkt.

- `import qualified Data.Map as M`

```
data Linear v = Linear (M.Map (Maybe v) Rational)
linf = Linear $ M.fromList
  [(Nothing, 5%2), (Just "x", -3%7), (Just "y", 4%1)]
```

```
plus (Linear p) (Linear q) =
  Linear $ M.filter (/= 0) $ M.unionWith (+) p q
```

- [https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/autotool/-/tree/master/collection/src/Fourier\\_Motzkin](https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/autotool/-/tree/master/collection/src/Fourier_Motzkin)

```
$ cabal repl autotool-collection -w /opt/ghc-9.8.4/bin/ghc
ghci> :l Fourier_Motzkin
ghci> scale 2 linf
```

## Fourier-Motzkin: Implementierung

- Datenmodell für Konjunktion von Ungl.

```
data Atom v = NonNegative {linear :: Linear v}
  | Positive {linear :: Linear v}
type Constraint v = [Atom v]
```

- `-- | f == 0` , where `f` contains `x`, is transformed to  
`-- f' == x` , where `f'` does not contain `x`  
`remove :: Ord v => v -> Atom v -> Linear v`
- Elimination einer/aller Variablen

```
resolve :: Ord v => v -> Constraint v -> Constraint v
satisfiable :: Ord v => Constraint v -> Bool
```

```
ghci> resolve "y" $ resolve "x" unsat
```

## Aufgaben

WS 24: 1, 2, 5

1. Finden Sie eine monotone Interpretation durch eine Gewichtsfunktion für das Wortersetzungssystem

```
(RULES
a a a -> b b,
b b b -> c d ,
c -> a a ,
d -> c )
```

(Quelle: SRS/Zantema/z116.srs aus <https://www.lri.fr/~marche/tpdb/tpdb-2.0/>, vgl. <https://termination-portal.org/wiki/TPDB>)

Stellen Sie das passende Ungleichungssystem auf, geben Sie eine (geratene) Lösung an.

2. Führen Sie das Fourier-Motzkin-Verfahren für dieses Ungleichungssystem durch.
3. Bestimmen Sie eine Lösung mit GLPK

4. Bestimmen Sie eine Lösung mit hmatrix-glpk.

Alberto Ruiz, Dominic Steinitz, 2010-2018, *Simple interface to linear programming functions provided by GLPK*. <https://hackage.haskell.org/package/hmatrix-glpk>

5. Finden Sie weitere Systeme aus SRS/Zantema/z101 ... z112 mit Gewichtsfunktion.

Vergleichen Sie mit den Lösungen, die in der letzten Termination Competition gefunden wurden. [https://termination-portal.org/wiki/Termination\\_Competition](https://termination-portal.org/wiki/Termination_Competition)

6. Vorverarbeitung eines Terminationsproblems durch *sparse tiling*, dann Gewichtsfunktion: siehe Geser, Hofbauer, Waldmann FSCD 2019 <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10528/>

beruht auf einer alten und einfachen Idee, Beispiel: 2-Kachelung für  $aa \rightarrow aba$  ergibt  $\{[aa] \rightarrow [ab][ba]\}$ , Anzahl der  $[aa]$  nimmt ab,

das klappt aber nicht immer so einfach (wann nicht?), läßt sich leicht reparieren (wie?)

in zitierter Quelle: Einschränkung der Kachelmenge

## 12 Aussagenlogische Resolution

### Definition: ein Resolutions-Schritt

- für zwei CNF-Klauseln  $C_1, C_2$  mit gemeinsamer Variable ( $y$ ) unterschiedlicher Polarität ( $y \in C_1, (\neg y) \in C_2$ )

$$\frac{(x_1 \vee \dots \vee x_m \vee y), (\neg y \vee z_1 \vee \dots \vee z_n)}{x_1 \vee \dots \vee x_m \vee z_1 \vee \dots \vee z_n}$$

- Beispiel:  $\frac{x \vee y, \neg y \vee \neg z}{x \vee \neg z}$
- Sprechweise: Klauseln  $C_1, C_2$  werden nach  $y$  *resolviert*.
- Schreibweise für Resolvente:  $C = C_1 \oplus_y C_2$ ,
- Satz:  $\{C_1, C_2\} \models C_1 \oplus_y C_2$ .  
Wdhlg Notation:  $M \models F$  bedeutet  $\text{Mod}(M) \subseteq \text{Mod}(F)$   
Beweis:  $\forall b \in \text{Mod}(\{C_1, C_2\})$  Falluntersch. nach  $b(y)$

### Variablen-Elimination durch vollst. Resolution

- für Formel (Klauselmeng)e  $F$  und Variable  $v$ :  
 $\text{Pos}_v(F) = \{c \mid c \in F, v \in c\}$ ;  $\text{Neg}_v(F) = \{c \mid c \in F, \neg v \in c\}$   
 $\text{Res}_v(F) = \bigcup_{p \in \text{Pos}_v(F), n \in \text{Neg}_v(F)} (p \oplus_v n)$
- Satz:  $F$  ist erfüllbarkeitsäquivalent zu  $G$   
mit  $G := F \setminus ((\text{Pos}_v(F) \cup \text{Neg}_v(F)) \cup \text{Res}_v(F))$ .
- das (iteriert) ist ein vollständiges Lösungsverfahren!  
aber unpraktisch, weil  $|G| \gg |F|$  möglich ist:  
 $|G| = |F| - (|\text{Pos}_v(F)| + |\text{Neg}_v(F)|) + |\text{Pos}_v(F)| \cdot |\text{Neg}_v(F)|$ .
- Anwendung: für solche  $v$ , für die  $|G| \leq |F| + \Delta$
- Quelle: Een und Biere: *Effective Preprocessing ...*, SAT 2005, <http://minisat.se/downloads/SatELite.pdf>  
dort weitere Vorverarbeitungs-Verfahren

### Resolution als Inferenzsystem

mehrere (teilw. sequentielle) Schritte:

- Schreibweise:  $M \vdash C$
- Klausel  $C$  ist ableitbar aus Klauselmeng)e  $M$
- Definition:
  - (Induktionsanfang) wenn  $C \in M$ , dann  $M \vdash C$
  - (Induktionsschritt)  
wenn  $M \vdash C_1$  und  $M \vdash C_2$ , dann  $M \vdash C_1 \oplus_y C_2$

Satz (Korrektheit der Resolution):  $M \vdash C \Rightarrow M \models C$

Beweis: Induktion über Länge der Ableitung

Beachte Unterschiede:

- Ableitung  $M \vdash C$  ist *syntaktisch* (Term-Umformung)
- Folgerung  $M \models C$  ist *semantisch* (Term-Auswertung)

### CDCL: Spezifikation, Motivation

conflict driven clause learning (Marques-Silva, Sakallah, 1996): aus Konflikt wird Klausel „gelernt“, bewirkt Propagationen in anderen Teilen des DPLL-Suchbaums

- wenn (nach Unit-Propagation) ein Konflikt auftritt,
- dann wird eine neue Klausel  $C'$  berechnet und zur Formel  $F$  hinzugefügt

- sowie ein früherer Entscheidungspunkt  $p$  als Ziel für Backjump bestimmt (hoffentlich: deutlich früher)
- so daß  $F \models C'$ , d. h. die Bedeutung wird nicht geändert,
- und  $C'$  in  $p$  sofort eine Unit-Propagation bewirkt, die diesen Konflikt verhindert (und hoffentlich weitere)
- mögl. Impl: lerne Negation der aktuellen Belegung,
- das geht aber deutlich besser, verwendet Resolution.

### CDCL: Implementierung, Übung

(Kroening/Strichman Abschn. 2.2.4)

```

cl := aktuelle Konfliktklausel;
while (cl enthält >= 2 Literale >= aktuell)
  lit := zuletzt zugewiesenes Literal aus cl;
  var := die Variable aus lit;
  ante := die Klausel, die in der Propagation
          benutzt wurde, welche lit belegt hat;
  cl := Resolve (ante, cl, var);

```

Beispiel:  $-1 \vee 2, -1 \vee 3 \vee 5, -2 \vee 4, -3 \vee -4, 1 \vee 5 \vee -2, 2 \vee 3, 2 \vee -3, 6 \vee -5, \dots$   
(weitere Klauseln mit anderen Var.)

Entscheidungen:  $\dots, -6, \dots, 1$ . Welche Klausel wird gelernt? Zu welchem Punkt wird zurückgekehrt?

(vgl. auch Beispiel in Folien v. Nieuvenhuis.)

### Resolution und Unerfüllbarkeit

Satz:  $\text{Mod}(F) = \emptyset \iff F \vdash \emptyset$  (in Worten:  $F$  in CNF nicht erfüllbar  $\iff$  aus  $F$  kann man die leere Klausel ableiten.)

- Korrektheit ( $\Leftarrow$ ): Übung.
- Vollständigkeit ( $\Rightarrow$ ): Induktion nach  $|\text{Var}(F)|$

dabei Induktionsschritt:

- betrachte  $F$  mit Variablen  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ .
- Konstruiere  $F_0$  (bzw.  $F_1$ ) aus  $F$  durch „Belegen von  $x_{n+1}$  mit 0 (bzw. 1)“  
(d. h. Streichen von Literalen und Klauseln)
- Zeige, daß  $F_0$  und  $F_1$  unerfüllbar sind.
- wende Induktionsannahme an:  $F_0 \vdash \emptyset, F_1 \vdash \emptyset$
- kombiniere diese Ableitungen

## Beweise für Nichterfüllbarkeit

- bisher: Interesse an erfüllender Belegung  $m \in \text{Mod}(F)$  (= Lösung einer Anwendungsaufgabe)
- jetzt: Interesse an  $\text{Mod}(F) = \emptyset$ .  
Anwendungen: Schaltkreis  $C$  erfüllt Spezifikation  $S \iff \text{Mod}(C(x) \neq S(x)) = \emptyset$ .

Solver rechnet lange, evtl. Hardwarefehler usw.

- $m \in \text{Mod}(F)$  kann man leicht prüfen  
(unabhängig von der Herleitung)
- wie prüft man  $\text{Mod}(F) = \emptyset$ ?  
(wie sieht ein *Zertifikat* dafür aus?)

## Reverse Unit Propagation

<http://www.satcompetition.org/2014/certunsat.shtml> *RUP proofs are a sequence of clauses that are redundant with respect to the input formula. To check that a clause  $C$  is redundant, all literals  $C$  are assigned to false followed by unit propagation. In order to verify redundancy, unit propagation should result in a conflict.*

$\curvearrowright$  Konflikt für  $F \wedge \neg C \curvearrowright F \wedge \neg C$  ist nicht erfüllbar  $\curvearrowright \neg F \vee C$  ist allgemeingültig  
 $\curvearrowright F \models C$  (aus  $F$  folgt  $C$ )  $\curvearrowright C$  „ist redundant“

siehe auch E.Goldberg, Y.Novikov. *Verification of proofs of unsatisfiability for CNF formulas*. Design, Automation and Test in Europe. 2003, March 3-7, pp.886-891 [http://eigold.tripod.com/papers/proof\\_verif.pdf](http://eigold.tripod.com/papers/proof_verif.pdf)

## Deletion Resolution Asymmetric Tautology

- Nathan Wetzler, Marijn J.H. Heule and Warren A. Hunt: *DRAT-trim: Efficient Checking and Trimming Using Expressive Clausal Proofs*. SAT 2014

<https://www.cs.utexas.edu/~marijn/drat-trim/>

- asymmetric literal addition: für CNF  $F$ , Klausel  $C$ :  $\text{ALA}(F, C)$  ist der Fixpunkt der Operation:

wenn  $\exists l_1, \dots, l_k \in C, (l_1 \vee \dots \vee l_k \vee l) \in F$ , dann  $C_{i+1} = C_i \cup \{\bar{l}\}$ .

- asymmetrische Tautologie:  $\text{AT}_F(C) := (\text{ALA}(F, C) = 1)$ .

resolution AT:

$\text{RAT}_F(C) := \exists l \in C : \forall D \in F : (\bar{l}) \in D \Rightarrow \text{AT}((D \setminus \{\bar{l}\}) \cup C)$

Satz:  $C \notin F \wedge \text{RAT}_F(C) \Rightarrow F \equiv_{\text{SAT}} (F \cup \{C\})$

## Übungen

WS23: empfohlen: 1, 2, 3, 5, 8

1. für unserer Microsat-Solver: Unit propagation und vollständige Elimination programmieren, testen, mit Vorverarbeitung von minisat usw. vergleichen.

2. Beispiele aus DRAT-Papier nachrechnen.

Wieso gilt „the property AT is also known as RUP“?

Den zitierten Satz  $C \notin F \wedge \text{RAT}_F(C) \Rightarrow F \equiv_{\text{SAT}} (F \cup \{C\})$  beweisen.

3. von Cadical einen UNSAT-Beweis ausgeben lassen (für eine kleine CNF),

von Hand überprüfen, maschinell überprüfen (<https://github.com/marijnheule/drat-trim>)

4. Die Werbung auf Webseite von drat-trim enthält: „RAT ... permits all known techniques including extended resolution, blocked clause addition, bounded variable addition, extended learning“.

Geben Sie Quellen und (einfache) Beispiele für diese Techniken an. Besonders: bounded variable *addition*.

5. für eine Teilformel  $F = F_1 \wedge F_2$  wird die Tseitin-Transformation durchgeführt und für die dabei entstehende Variable  $v_F$  (mit  $v_f \leftrightarrow F$ ) ein assert.

Was passiert bei vollständiger Elimination von  $v_F$ ?

(Es ist anzunehmen, daß das alle Solver tun. Deswegen ist für ersatz wohl keine Plaisted-Greenbaum-Transformation (J. Symb. Comp. 2(3) 1986, pp 293-304) [https://doi.org/10.1016/S0747-7171\(86\)80028-1](https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80028-1) notwendig.)

6. Wenn  $G$  aus  $F$  durch vollständige Resolution (Elimination) von  $v$  entsteht: Konstruieren Sie aus einem Modell  $b$  für  $G$  ein Modell für  $F$  (wie ist  $v$  zu belegen?)

7. für eine unerfüllbare Schubfachscluß-Formel (in jeder Zeile  $1, \dots, H$  höchstens einer wahr, in jeder Spalte  $1, \dots, B$  wenigstens einer wahr, z.B. für  $B = 3, H = 2$  die Klauselmenge  $\{\overline{12}, \overline{13}, \overline{33}, \overline{45}, \overline{46}, \overline{56}, 12, 34, 56\}$

einen möglichst kurzen Beweis der Unerfüllbarkeit

(a) mit DPLL (ohne Lernen)

(b) mit DPLL und CDCL

(c) ... und vorheriger Variablen-Elimination

- (d) ... nur mit Variablen-Elimination (ohne DPLL)
8. Geben Sie ein Polynomialzeit-Entscheidungsverfahren für 2SAT (in der CNF hat jede Klausel  $\leq 2$  Literale) an.  
Sind die Lösungsverfahren (DPLL, DPLL + CDCL, Variablen-Elimination) für 2SAT polynomiell? (Wenn ja, Beweis; wenn nein, geben Sie eine Familie von nicht erfüllbare 2SAT-Formeln an, für welche die Verfahren lange rechnen)
9. ich denke, die Giraffe (der (1, 4)-Springer) hat keinen Hamiltonpfad auf  $11 \times 11$ , siehe <https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/sat/leaper/>. Nachrechnen und schön aufschreiben: Bachelorarbeit.

## 13 Presburger-Arithmetik

### Definition, Resultate

(nach Mojżesz Presburger, 1904–1943)

- Prädikatenlogik (d. h. alle Quantoren  $\forall, \exists$ , alle Booleschen Verknüpfungen)
- Signatur: Fun.-Symbole  $0, 1, +$ , Rel.-Symbole  $=, <, \leq$
- interpretiert in der Struktur der natürlichen Zahlen

Resultate:

- Presburger 1929: Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit solcher Formeln sind entscheidbar
- Fischer und Rabin 1974: Entscheidungsproblem hat Komplexität  $\in \Omega(2^{2^n})$  (untere Schranke! selten!)

### Beispiele f. Presburger-Formeln

Beispiele:

- es gibt eine gerade Zahl:  $\exists x : \exists y : x = y + y$
- jede Zahl ist gerade oder ungerade: ...

definierbare Funktionen und Relationen:

- Minimum, Maximum

- Differenz? Produkt?
- kleiner-als ( $<$ ) nur mit Gleichheit ( $=$ )?
- $0, 1, 2, 4, 8, \dots x = 2^k$  durch eine Formel der Größe  $O(k)$

kann man noch größere Zahlen durch kleine Formeln definieren?

### Entscheidungsverfahren (Ansatz)

Def.: Menge  $M \subset \mathbb{N}^k$  heißt *P-definierbar*

$\iff$  es gibt eine P-Formel  $F$  so daß  $M = \text{Mod}(F)$

wobei  $\text{Mod}(F) := \{m \in \mathbb{N}^k \mid \{x_1 \mapsto m_1, \dots, x_k \mapsto m_k\} \models F\}$   
für  $F$  mit freien Var.  $x_1, \dots, x_k$ ,

Satz: jede solche Modellmenge  $\text{Mod}(F)$  ist *effektiv regulär*:

- es gibt einen Algorithmus, der zu jeder P-Formel  $F \dots$
- $\dots$  einen endl. Automaten  $A$  konstruiert mit  $\text{Lang}(A) = \text{Kodierung von } \text{Mod}(F)$

Folgerung: Allgemeingültigkeit ist entscheidbar:

$\text{Lang}(A) = \emptyset$  gdw.  $\text{Mod}(F) = \emptyset$  gdw.  $F$  ist widersprüchlich gdw.  $\neg F$  ist allgemeingültig.

### Entscheidungsverfahren (Kodierung)

Kodierung ist nötig,

denn  $\text{Mod}(F) \subseteq \mathbb{N}^k$ , aber  $\text{Lang}(A) \subseteq \Sigma^*$ .

wählen  $\Sigma = \{0, 1\}^k$ , benutze Ideen:

- Kodierung einer Zahl: binär (LSB links)

$$c(3) = 11, c(13) = 1011$$

- Kodierung eines Tupels: durch Stapeln

$$c(3, 13) = (1, 1)(1, 0)(0, 1)(0, 1)$$

Beispiele: Automat oder reg. Ausdruck für

- $\{c(x) \mid x \text{ ist gerade}\}, \{c(x) \mid x \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\},$
- $\{c(x, y) \mid x + x = y\}, \{c(x, y, z) \mid x + y = z\},$
- $\{c(x, y) \mid x \leq y\}, \{c(x, y) \mid x < y\}$

## Formeln und Modellmengen

Idee: logische Verknüpfungen  $\Rightarrow$  passende Operationen auf (kodierten) Modellmengen

- $\text{Mod}(\text{False}) = \emptyset, \text{Mod}(\neg F) = \dots$
- $\text{Mod}(F_1 \wedge F_2) = \text{Mod}(F_1) \cap \text{Mod}(F_2)$
- $\text{Mod}(\exists x_i. F) = \text{proj}_i(\text{Mod}(F))$

Projektion entlang  $i$ -ter Komponente:  $\text{proj}_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^{k-1} :$

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

zu zeigen ist, daß sich diese Operationen effektiv realisieren lassen (wobei Ein- und Ausgabe durch endl. Automaten dargestellt werden)

Ü: warum werden andere Verknüpfungen nicht benötigt?

## Automaten (Definition)

Def:  $A = (\Sigma, Q, I, \delta, F)$  mit

- Alphabet  $\Sigma$ , Zustandsmenge  $Q$ ,
- Initialzustände  $I \subseteq Q$ , Finalzustände  $F \subseteq Q$ ,
- Übergangsrelationen (f. Buchstaben)  $\delta : \Sigma \rightarrow Q \times Q$ .

daraus abgeleitet:

- Übergangsrelation f. Wort  $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ :  
$$\delta'(w) = \delta(w_1) \circ \dots \circ \delta(w_n)$$
- $A$  akzeptiert  $w$  gdw.  $\exists p \in I : \exists q \in F : \delta'(w)(p, q)$
- Menge (Sprache) der akzeptierten Wörter:  
$$\text{Lang}(A) = \{w \mid A \text{ akzeptiert } w\} = \{w \mid I \circ \delta'(w) \circ F^T \neq \emptyset\}$$

## Automaten (Operationen: Durchschnitt)

Eingabe:  $A_1 = (\Sigma, Q_1, I_1, \delta_1, F_1), A_2 = (\Sigma, Q_2, I_2, \delta_2, F_2)$ ,

Ausgabe:  $A$  mit  $\text{Lang}(A) = \text{Lang}(A_1) \cap \text{Lang}(A_2)$

Lösung durch Kreuzprodukt-Konstruktion:  $A = (\Sigma, Q, I, \delta, F)$  mit

- $Q = Q_1 \times Q_2$  (daher der Name)
- $I = I_1 \times I_2, F = F_1 \times F_2$

- $\delta(c)((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = \dots$

Korrektheit:  $\forall w \in \Sigma^* : w \in \text{Lang}(A) \iff w \in \text{Lang}(A_1) \wedge w \in \text{Lang}(A_2)$

Komplexität:  $|Q| = |Q_1| \cdot |Q_2|$  (hier: Zeit = Platz)

### Automaten (Operationen: Komplement)

Eingabe:  $A_1 = (\Sigma, Q_1, I_1, \delta_1, F_1)$ ,

Ausgabe:  $A$  mit  $\text{Lang}(A) = \Sigma^* \setminus \text{Lang}(A_1)$

Lösung durch Potenzmengen-Konstruktion:  $A = (\Sigma, Q, I, \delta, F)$  mit

- $Q = 2^{Q_1}$  (daher der Name)
- $I = \{I_1\}, F = 2^{Q_1 \setminus F_1}$
- $\delta(c)(M) = \dots$

Korrektheit:  $\forall w \in \Sigma^* : w \in \text{Lang}(A) \iff w \notin \text{Lang}(A_1)$

Komplexität:  $|Q| = 2^{|Q_1|}$  (hier: Zeit = Platz)

Diskussion von Implementierungen <https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/fdaln/-/blob/master/DFA.hs>

### Automaten (Operationen: Projektion)

Eingabe: Automat  $A_1 = (\Sigma^k, Q_1, I_1, \delta_1, F_1)$ , Zahl  $i$

Ausgabe:  $A$  mit  $\text{Lang}(A) = \text{Lang}(\text{proj}_i(A_1))$

Lösung:  $A = (\Sigma^{k-1}, Q, I, \delta, F)$  mit

- $Q = Q_1, I = I_1, F = F_1$
- $\delta(c)(p, q) = \dots$

Korrektheit:  $\forall w \in \Sigma^* : w \in \text{Lang}(A) \iff w \in \text{Lang}(\text{proj}_i(A_1))$

Komplexität:  $|Q| = |Q_1|$  (hier: Zeit = Platz)

## Zusammenfassung Entscheidbarkeit

durch Automaten-Operationen sind realisierbar:

- elementare Relationen ( $x + y = z$ )
- Quantoren und logische Verknüpfungen

Folgerungen

- zu jeder Presburger-Formel  $F$  kann ein Automat  $A$  konstruiert werden mit  $\text{Mod}(F) = \text{Lang}(A)$ .
- Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Widersprüchlichkeit von Presburger-Formel ist entscheidbar.

die Komplexität des hier angegebenen Entscheidungsverfahrens ist hoch, geht das besser?

## Eine untere Schranke

*Fischer und Rabin 1974*: <http://www.lcs.mit.edu/publications/pubs/ps/MIT-LCS-TM-043.ps>

Für jedes Entscheidungsverfahren  $E$  für Presburger-Arithmetik existiert eine Formel  $F$ ,

so daß  $E(F)$  wenigstens  $2^{2^{|F|}}$  Rechenschritte benötigt.

Beweis-Plan: Diagonalisierung (vgl. Halteproblem):

wende solch ein Entscheidungsverfahren „auf sich selbst“ an.

Dazu ist Kodierung nötig (Turing-Programm  $\leftrightarrow$  Zahl)

## Untere Schranke

Für Maschine  $M$  und Eingabe  $x$  sowie Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (z. B.  $n \mapsto 2^{2^n}$ ) konstruiere Formel  $D(M, x)$  mit

- $D(M, x) \iff$  Maschine  $M$  hält bei Eingabe  $x$  in  $\leq f(|x|)$  Schritten.
- $D(M, x)$  ist klein und kann schnell berechnet werden.

Für jedes Entscheidungsverfahren  $E$  für Presburger-Arithmetik:

- konstruiere Programm  $E_0(x)$ : if  $E(\neg D(x, x))$  then stop else Endlosschleife.
- Beweise: Rechnung  $E_0(E_0)$  hält nach  $> f(|E_0|)$  Schritten.

bleibt zu zeigen, daß man solche  $D$  konstruieren kann.

## Presburger-Arithmetik und große Zahlen

(folgende Konstruktion ist ähnlich zu der, die im tatsächlichen Beweis verwendet wird)  
es gibt eine Folge von P-Formeln  $F_0, F_1, \dots$  mit

- $|F_n| \in O(n)$
- $F_n(x) \iff x = 2^{2^n}$

Realisierung

- verwende  $G_n(x, y, z)$  mit Spezifikation  $x = 2^{2^n} \wedge xy = z$   
(die naive Implementierung ist aber zu groß)
- und Trick (“the device preceding Theorem 8”):  
 $H(x_1) \wedge H(x_2)$  ist äquivalent zu  
 $\forall x \forall y : (x = x_1 \vee \dots) \rightarrow \dots$  (nur ein Vorkommen von  $H$ )

## Semilineare Mengen

- Def:  $M \subseteq \mathbb{N}^k$  ist *linear*, falls  
 $\exists \vec{a}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in \mathbb{N}^k : M = \{ \vec{a} + \sum c_i \cdot \vec{b}_i \mid c_i \in \mathbb{N} \}$ .
- Def:  $M$  ist *semi-linear*:  $M$  ist endliche Vereinigung von linearen Mengen.
- Satz (Ginsburg and Spanier, 1966) <https://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102994974>  
 $M$  ist Presburger-definierbar  $\iff M$  ist semi-linear.
- Beispiele:  $\text{Mod}(x = y) = (0, 0) + c_1 \cdot (1, 1)$ ,  $\text{Mod}(x \neq y) = ((1, 0) + c_1 \cdot (1, 1) + c_2 \cdot (1, 0)) \cup \dots$

## Semilineare Mengen

- $M$  ist Presburger-definierbar  $\iff M$  ist semi-linear.  
Beweis: Übungsaufgabe
- $M$  ist Presburger-definierbar  $\implies M$  ist semi-linear.  
Beweis: semi-lineare Darstellung durch Induktion über den Formelaufbau ausrechnen.  
dazu sind zu implementieren:  
Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Projektion von semi-linearen Mengen

- Anwendung semi-linearer Mengen (*grid generator*) bei Programm-Analyse (in GCC):  
Bagnara: Parma Polyhedral Library [https://gcc.gnu.org/wiki/Graphite\\_Workshop\\_Nov08](https://gcc.gnu.org/wiki/Graphite_Workshop_Nov08)

## Aufgaben

1. Automaten oder regulären Ausdruck angeben für  $M_t = \text{Mod}(t \mid x)$  für  $t = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .  
Bsp:  $M_2 = 0(0 + 1)^*$  ( $x$  ist durch 2 teilbar  $\iff$  LSB der Binärdarstellung von  $x$  ist 0)
2. Implementierung <https://gitlab.dit.htwk-leipzig.de/johannes.waldmann/presburger-arithmetic> (benutzt Funktionen für endliche Automaten aus autotool).
  - Beispiele testen, eigene schreiben  
Jede Zahl ist gerade (= das Doppelte einer Zahl) oder ungerade (= der Nachfolger einer geraden Zahl)  
Zu jeder Zahl gibt es eine größere gerade Zahl.  
Es gibt eine Zahl, die keinen Vorgänger hat.  
Es gibt genau eine Zahl, die keinen Vorgänger hat.  
(ein ganzzahliges lineares Ungleichungssystem, ein SMT-Problem (QFLIA), ein SAT-Problem, eine Adventskalender-Aufgabe)
  - Eine Beispiel-Formel schreiben, deren Modellmenge endlich ist. Deren Repräsentation als Automat betrachten. (Kleine Formel mit möglichst großer endlicher Modellmenge?)  
Programm antwortet nur Ja/Nein, es fehlt (für Ja) eine vernünftige Ausgabe (von einigen Elementen) der Modellmenge ( $\Rightarrow$  Projekt, Bachelorarbeit)
  - Eine (möglichst kleine) Beispiel-Formel schreiben, für die das Entscheidungsverfahren lange rechnet.  
Profiling-Daten erzeugen (siehe README), damit Implementierungs-Entscheidungen diskutieren.
3. Für semi-lineare Mengen:
  - Vereinigung (trivial)
  - Projektion (trivial)

- Durchschnitt
- Komplement

(jeweils konkretes Beispiel angeben und allgemeines Verfahren diskutieren)

Wenn man Komplement hat, braucht man Durchschnitt nicht, warum?

## 14 Programm = Beweis

### Plan, Motivation

- die Curry (1960)-Howard (1969)-Isomorphie:  
Typ = Behauptung (Proposition), Programm = Beweis  
Behauptung: Typ  $T$  ist nicht leer,  
Beweis dafür: ein Ausdruck (Programm)  $P$  mit Typ  $T$ .
- dann ist Beweis-Prüfung = Typ-Prüfung
- diese kann automatisiert werden (Bsp: Sprache Agda)
- ... die Beweis-Suche aber nicht (volle Prädikatenlogik, Wahrheit ist nicht entscheidbar)
- Unterstützung (interact. proof assistant, Bsp: Agda Emacs mode) für die schrittweise Beweis-Konstruktion

### Konjunktion = Kreuzprodukt

- $(A \wedge B)$  ist wahr gdw.  $A$  wahr und  $B$  wahr  
Typ  $(A \wedge B)$  nicht leer gdw.  $A$  nicht leer und  $B$  nicht leer
- `data Und (a b : Set) : Set where  
 beide : a -> b -> Und a b`
- das ist die generalized algebraic data type (GADT)-Notation für den Haskell-Typ  
`data Pair a b = Beide a b`
- in Agda: Typ-Argumente müssen deklariert werden,  
Groß/Klein-Schreibung ist frei wählbar,  
Operatoren  $(->, :)$  benötigen Leerzeichen,  
denn `a->b` ist *ein* gültiger Name

## Implikation = Funktionstyp

- wenn  $(A \rightarrow B)$  wahr ist, und  $A$  wahr ist, dann ist  $B$  wahr  
modus ponens (Abtrennungsregel)  $\frac{A \rightarrow B, A}{B}$
- Implikation  $A \rightarrow B$  realisiert durch Funktionstyp  $A \rightarrow B$
- Beispiel: wir behaupten und zeigen  $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$   
Behauptung: `prop : {a b : Set} -> Und a b -> Und b a`
- Beweis: eine Implementierung `prop (beide x y) = ?`
- Syntax: in geschweiften Klammern (im Typ):  
*implizite* Argumente (weglassen in Impl.)

## Disjunktion = disj. Vereinigung

- $A \vee B$  ist wahr gdw.  $A$  wahr oder  $B$  wahr ist  
Typ  $A \vee B$  ist nicht leer gdw.  $A$  nicht leer oder  $B$  nicht leer

```
data Oder (a b : Set) : Set where
  links  : a -> Oder a b
  rechts : a -> Oder a b
```

- ein Distributivgesetz  $(A \vee B) \wedge C \rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

```
dist : {a b c : Set} -> Und (Oder a b) c
      -> Oder (Und a c) (Und b c)
```

- Beweis durch vollständige Fallunterscheidung

```
dist (beide (links x) z) = ?
...
```

## Schrittweise Beweis-Konstruktion

- Lücken im Beweis schreiben als ?
- `C-c C-l` (load) Modul kompilieren
- `C-c C-`, Ziel (Typ der Lücke) und Kontext (Typen der gebundene Namen) anzeigen
- `C-c C-c` (case) vollständige Fallunterscheidung für eine (Argument-)Variable<sup>3</sup>
- `C-c C-SPC` (give) Lücke füllen
- `C-c C-r` (refine) ersetze ? durch `f ? ... ?` (passende Anzahl neuer Lücken)
- `C-c C-a` (auto)

## Das Falsche, das Wahre

- Aussage  $A$  wahr gdw. Type  $A$  nicht leer,  
also:  $A$  falsch gdw.  $A$  leer, d.h., ohne Konstruktoren  
`data Absurd : Set, Bezeichnung auch  $\perp$  (bottom).`
- dieses Programm hat *nicht* den Typ `Absurd` ; `f = f` (in Haskell: statisch korrekt, in Agda: wegen Nichttermination abgelehnt)
- vgl. das Wahre: `data Unit : Set where unit : Unit`, auch  $\top$  (top).
- `exfalso : Absurd -> Unit`  
Beweis: `exfalso ()` das ist keine Gleichung (Implementierung), sondern die Behauptung, daß es keine gibt.

## Die Negation

- eine Art der Negation  $\neg A$  ist definiert als  $(A \rightarrow \perp)$ .

`not : Set -> Set ; not a = a -> Absurd`

Bezeichnung: das ist *intuitionistische* Logik

Vorsicht, dafür gilt  $A \rightarrow \neg\neg A$  (Ü), aber nicht  $\neg\neg A \rightarrow A$

- $\ddot{U}$ :  $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$
- de Morgan:  $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $\ddot{U}$ : andere Varianten dieser Aussage. nicht alle klassische wahren sind auch intuitionistisch wahr.

## Die Peano-Zahlen

- den Typ schreiben wir genauso wie früher in Haskell

```
data Nat : Set where zero : Nat ; succ : Nat -> Nat
```

- Funktionen auch (Fallunterscheidung, Rekursion)

```
plus : Nat -> Nat -> Nat
plus zero y = y ; plus (succ x) y = succ (plus x y)
```

- Unterschiede zu Haskell: Vollständigkeit, Termination (Beispiele!)

## Eigenschaften von Zahlen (Bsp. 1)

- Bsp: die Eigenschaft „ist gerade“.  
wir rechnen nicht einen Wahrheitswert aus,  
sondern geben Beweismöglichkeiten an:

```
data even : Nat -> Set where
  even-zero : even zero
  even-succ : {x : Nat}
    -> even x -> even (succ (succ x))
```

- Typ v. `even-succ` ist *dependent* (daten-abhängig, von `x`)
- Beweis (vollständige ! Fallunterscheidung)

```
even-plus
  : (x y : Nat) -> even x -> even y -> even (plus x y)
even-plus zero y ex ey = ey
even-plus (succ (succ x)) y (even-succ ex) ey = ?
```

## Die Sprache/Das System Agda

- *dependently typed functional programming language*: has inductive families (data types which depend on values) *proof assistant*: interactive system for writing and checking proofs. based on intuitionistic type theory,  
<https://wiki.portal.chalmers.se/agda/>
- Per Martin-Löf, *Constructive Mathematics and Computer Programming*, 1979 <http://intuitionistic.files.wordpress.com/2010/07/martin-lof-computer.pdf>
- Wadler, Kokke, Siek: *Programming Language Foundations in Agda* <https://plfa.github.io/>
- Samuel Mimram: *Program = Proof* <https://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Samuel.Mimram/>

## Aufgaben

exakt formalisieren, Beweis schrittweise entwickeln  
Code aus VL verwenden (d.h., keine Standardbibliothek)  
(möglichst viel C-c . . ., möglichst wenig selbst schreiben)

1. Assoziativität des Oder
2.  $\neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$
3. Varianten von de Morgan

# 15 Dependent Typen und Muster

## Datentypen

- ohne Parameter, ohne Index:

```
data T : Set where A : T ; B : T
```

alle Konstruktoren liefern gleichen Typ

- mit Parameter (generische Polymorphie)

```
data M (a : Set) : Set where N : M a; J : a -> M a
```

Parameter vor Doppelpunkt, in allen Konstruktoren sichtbar, alle Konstruktoren liefern gleichen Typ

- mit Index (dependent Type)

```
data D : T -> Set where E : D A; F : (x : T) -> D x
```

Index nach Doppelp., kann in Konst. unterschiedlich sein

### Pattern Matching in Funktions-Def.

- definierte Funktion soll total sein  $\Rightarrow$  jede Fallunterscheidung muß vollständig sein
- match auf Argument mit nicht indiziertem Typ:  
für jeden Konstruktor eine Klausel
- match auf Argument mit indiziertem Typ:
  - für jede Klausel: Index des Musters *unifizierbar* mit Index des Arguments
  - für jede fehlende Klausel: nicht unifizierbar

Bsp: ist vollständig, Muster `f A (F B)` fehlt:

```
f : (x : T) -> (y : D x) -> Unit
f A E = ? ; f A (F A) = ? ; f B y = ?
```

### Anwendung: längen-indizierte Vektoren

- natürliche Zahlen als Peano-Zahlen

```
data Nat : Set where zero : Nat; succ : Nat -> Nat
```

- Vektor mit Inhaltstyp als Parameter, Länge als Index

```
data Vec (a : Set) : Nat -> Set where
  nil : Vec a zero
  cons : {n : Nat} -> a -> Vec a n -> Vec a (succ n)
```

- Anwendung: diese Funktion ist total

```
head : {a : Set} {n : Nat} -> Vec a (succ n) -> a
head (cons x v) = x
```

die Klausel für `head nil` fehlt, denn die Indizes sind nicht unifizierbar (aus Typ von `head`: Index `succ n`, aus Typ von `nil`: Index `zero`)

## Die Gleichheit

- zwei Dinge sind gleich—wenn sie identisch sind

```
data Eq {a : Set} : (x y : a) -> Set where
  refl : {x : a} -> Eq x x    -- reflexiv
```

der Konstruktor (refl) hat einen eingeschränkten Typ (nicht  $\text{Eq } x \ y$ )

- Bsp: diese Gleichheit ist transitiv:

```
trans : {a : Set} -> {x y z : a}
  -> Eq x y -> Eq y z -> Eq x z
trans refl refl = ?
```

das erst Arg. hat Typ  $\text{Eq } x \ y$  und Konstruktor `refl` (vollst. Falluntersch.: es gibt keinen anderen). Also folgt  $x = y$ . Entspr.  $y = z$ ,

## Anwendung Gleichheit

- Funktionsanwendung: gleiche Argumente ergeben gleiches Resultat

```
cong-succ
  : (x y : Nat) -> Eq x y -> Eq (succ x) (succ y)
cong-succ x y refl = refl
```

- Assoziativität der Addition, Beweis durch Induktion

```
plus-assoc : (x y z : Nat)
  -> Eq (plus x (plus y z)) (plus (plus x y) z)
plus-assoc zero y z = refl
plus-assoc (succ x) y z = cong-succ ? ? ?
```

im I.S. wird die Kongruenz angewendet auf die I.V.

## Notation für Gleichungsketten

- so sieht man besser, was passiert:

```

plus-assoc-v (succ x) y z = begin
  plus (succ x) (plus y z)
  =[] succ (plus x (plus y z))
  =[ cong succ (plus-assoc-v x y z) ]
  succ (plus (plus x y) z)
  =[] plus (succ (plus x y)) z
  =[] plus (plus (succ x) y) z      end

```

- mit diesen Operatoren  
(Argument x wird nicht benutzt, nur hingeschrieben)

```

infix 1 begin_      begin refl = refl
infixr 2 _=[]_      x =[] refl = refl
infixr 2 _=[_]_     x =[ exy ] eyz = trans exy eyz
infix 3 _end        x end = refl

```

## Operator-Syntax in Agda

- mehrstellige benutzerdefinierte Operatoren
- Operator-Namen: beliebige Zeichenfolge (keine Klammern)
  - keine Leerzeichen,
  - jeder Unterstrich bezeichnet eine Argumentposition
- ein Op. aus vorigem Beispiel, vollständig definiert:

– Typ:

```

_=[_]_ : {A : Set} (x : A) {y z : A}
  -> Eq x y -> Eq y z -> Eq x z

```

– Implementierung: `x =[ exy ] eyz = trans exy eyz`

– Präzedenz, Assoziativität: `infixr 2 _=[_]_`

- Beispiele: `_+_`, `_<_`, `if_then_else_`

## Aufgaben

exakt formalisieren, Beweis schrittweise entwickeln  
 Code aus VL verwenden (d.h., keine Standardbibliothek)  
 (möglichst viel C-C . . ., möglichst wenig selbst schreiben)

1.  $x + 0 = x$
2.  $x + y = y + x$
3. `cong-succ` verallgemeinern: Aussage gilt nicht nur für `succ : Nat -> Nat`, sondern für beliebige Funktion `f : a -> b`
4. Multiplikation definieren (Induktion über 1. Arg.)
5. gerade mal beliebig ergibt gerade
6. Multiplikation ist assoziativ, kommutativ, distributiv (rechts und links) bzgl. Addition

## 16 Paare, Records, Spezifikationen

### Paare

- bisher: unabhängige Typen der Komponenten (vgl. `Und`)

```
data Pair (A B : Set) : Set
  where pair : (x : A) -> (y : B) -> (Pair A B)
```

- Typ der zweiten Komp. hängt vom Wert der ersten ab:

```
data Pair (A : Set) (P : A -> Set) : Set
  where pair : (x : A) -> (y : P x) -> (Pair A P)
```

- solches `pair x b : Pair A P` ist Beweis für die Aussage  $\exists x \in A : P(x)$
- Standardbibliothek: Konstruktor ist Operator `_ , _`

### Records

- bisher:

```
data Pair (A : Set) (P : A -> Set) : Set
  where pair : (x : A) -> (y : P x) -> (Pair A P)
```

- alternative Notation:

```

record Pair (A : Set) (P : A -> Set) : Set where
  field
    first : A
    second : P first

```

- Konstruktion eines Records:

```

p4 : Pair Nat even
p4 = record { first = zero; second = even-zero }

```

## Spezifikation algebraischer Strukturen

- Bsp:  $(A, e, f)$  heißt *Monoid*, wenn  $A$  Menge,  $e \in A$ ,  $f : A^2 \rightarrow A$ ,  $f$  assoziativ,  $e$  links und rechts neutral für  $f$
- Record mit Daten und Beweisen der Eigenschaften

```

record Monoid (A : Set) : Set where field
  unit : A ; _o_ : A -> A -> A
  assoc : (x y z : A) -> Eq (x o (y o z)) ((x o y) o z)
  left-unit : (x : A) -> Eq (unit o x) x
  right-unit : (x : A) -> Eq (x o unit) x

```

- plus-monoid : Monoid Nat
- ```

plus-monoid = record
  { unit = zero ; _o_ = plus ; assoc = plus-assoc
  ; left-unit = x → refl ; right-unit = plus-x-0 }

```

## Spezifikation = Abstrakter Datentyp

- record Monoid (A : Set) ist abstrakter Datentyp:
  - Typen für *Operationen* (unit, \_o\_)
  - Spezifikationen (Axiome) (assoc, ...)
- plus-monoid : Monoid Nat ist konkreter Datentyp:
  - Implementierungen für Operationen
  - Beweise für Axiome
- in weniger ausdrucksstarken Sprachen: Spezifikation und Beweis nur als Kommentar oder Laufzeittest

## Zusammensetzen von Spezifikationen

- ```
record Semiring (A : Set) : Set where field
  m-plus : Monoid A
  comm : let _+_ = Monoid._o_ m-plus
         in (x y : A) -> Eq (x + y) (y + x)
  m-times : Monoid A
  dist-l : let -- TODO: kürzere Notation?
           _+_ = Monoid._o_ m-plus
           *_ = Monoid._o_ m-times
         in (x y z : A)
           -> Eq ((x + y) * z) ((x * z) + (y * z))
  dist-r : ...
```
- ```
plus-times-semiring : Semiring Nat
plus-times-semiring = record
  { m-plus = plus-monoid ; m-times = times-monoid
    ; comm = ? ; dist-l = ? ; dist-r = ? }
```

## Bibliotheken für ADTs (Bsp.)

- für jeden Halbring  $A$ : Konstruktion des Halbrings der quadratischen Matrizen über  $A$  (fixierter Dimension  $> 0$ )

```
Mat : (A : Set) (d : Nat) -> Set
Mat A d = Vec (Vec A d) d
mat-semi : {A : Set} {d : Nat}
  -> Semiring A -> Semiring (Mat A (succ d))
```

realisiert werden müssen Nullmatrix, Einheitsmatrix, Matrix-Addition, -Multiplikation, Assoziativität,...

- geht evtl. besser, wenn man Matrix auffaßt als Darstellung einer linearen Abbildung zw. Vektorräumen, und so lange wie möglich koordinatenfrei rechnet, vgl. Sheldon Axler: *Linear Algebra Done Right* <https://linear.axler.net/>

## Aufgaben

1. 

```
data Exists {A : Set} (P : A -> Set) : Set
  where exists : (x : A) -> (y : P x) -> (Exists P)
```

beweise

```
p3 : {A : Set} (P Q : A -> Set)
  -> Exists (\ x -> Und (P x) (Q x))
  -> Exists (\ x -> P x)
```

2. `b1 : not (Exists (\ x -> Und (even x) (even (succ x))))`  
`b1 (exists x u) = f x u where`  
`f : (x : Nat) -> Und (even x) (even (succ x)) -> Absurd`  
`f x b = ?`

3. ergänze

```
times-monoid : Monoid Nat
times-monoid = record { unit = ?; _o_ = times; ... }
```

4. für jeden Typ  $A$ : Menge der Funktionen  $A \rightarrow A$  ist Monoid bezüglich Komposition (Nacheinanderausführung)

5. Begriff Halbordnung als Record spezifizieren,

Operator `_<=_` : `Nat -> Nat -> Set` implementieren,  
als Halbordnung deklarieren (Eigenschaften beweisen).

6. Wenn Relation  $R$  Halbordnung auf Menge  $A$ , dann ist auch Relation  $R^-$  Halbordnung auf  $A$

7. Matrix-Halbring (Projekt).

Fortsetzung als BA/MA: Matrix-Interpretationen für Cetera, <https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cetera/-/issues/7>

8. BA/MA: Agda-Lückentextaufgabe für autotool <https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/autotool/-/issues/1019>

# 17 Entscheidbarkeit, Programme

## Motivation

- intuitionistischer Wahrheitsbegriff:

Aussage  $A$  ist wahr, wenn sie einen Beweis hat;

Aussage  $A$  ist falsch, wenn  $A \rightarrow \perp$  einen Beweis hat.

```
data _<=_ : Nat -> Nat -> Set where ...
```

- klassische Wahrheitswerte

```
data Bool : Set where false : Bool; true : Bool
```

- Prädikat  $P$  auf  $A$  ist entscheidbar, wenn  $P : A \rightarrow \text{Bool}$  berechenbar, Bsp.  $\_<=b\_ : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}$
- Semantik: Beziehung zw.  $<=$  und  $<=b$ ,
- Pragmatik: Vermeidung doppelten Codes (mit  $<=?$ )

## Rechnung und separater Beweis

- Korrektheit der Implementierung:

```
T : Bool -> Set; T false = Absurd; T true = Unit  
F : Bool -> Set; F false = Unit; F true = Absurd
```

```
q0 : (x y : Nat) -> T (x <=b y) -> x <= y
```

```
q1 : (x y : Nat) -> T (x <=b y) -> x <= y
```

```
q1 zero y leb = le-zero
```

```
q1 (succ x) (succ y) leb = le-succ (q1 x y leb)
```

```
q2 : (x y : Nat) -> F (x <=b y) -> not (x <= y)
```

- in den Beweisen dieser Aussagen wird die Programmstruktur von  $\_<=b\_$  wiederholt

## Rechnung, mit Beweis verbunden

- in den Beweisen der Aussagen über  $\_<=b\_$  wird die Programmstruktur von  $\_<=b\_$  wiederholt

- besser: berechne nicht `Bool`, sondern Oder `(not (x <= y)) (x <= y)` (Beweis für Aussage oder Beweis für ihre Negation)
- kürzere Notation dieses Typs durch `Dec (x <= y)` mit

```
data Dec (A : Set) : Set where
  no : not A -> Dec A ;   yes : A -> Dec A
```

- anstelle von `_<=b_` verwende

```
_<=?_ : (x : Nat) -> (y : Nat) -> Dec (x <= y)
```

### Lokaler Pattern Match mit `with`

```
data _<=_ : Nat -> Nat -> Set where
  le-zero : {y : Nat} -> zero <= y
  le-succ : {x y : Nat} -> x <= y -> succ x <= succ y
```

```
data Dec (A : Set) : Set where
  no : not A -> Dec A
  yes : A -> Dec A
```

```
_<=?_ : (x : Nat) -> (y : Nat) -> Dec (x <= y)
zero <=? y = yes le-zero
succ x <=? zero = no (\ ())
succ x <=? succ y with x <=? y
... | no p = no (\ { (le-succ a) -> p a } )
... | yes p = yes (le-succ p)
```

### Programm-Korrektheit: extrinsisch

- Bsp: Sortieren durch Einfügen, Einfügen in monotone Liste (von Zahlen) erzeugt monotone Liste.
- Quelle: S. Mimram: `Program = Proof`, Kapitel 6.7
- Datentyp und Funktionen wie in Haskell:

```
data List (A : Set) -> Set where
  nil : List A; cons : A -> List A -> List A
  insert : Nat -> List Nat -> List Nat
```

- Spezifikation und Beweis separat von Programm:

```

mono : List Nat -> Set
mono (cons x ys) = x <=* ys && mono ys
prop : (x : Nat) (ys : List Nat)
  -> mono ys -> mono (insert x ys)

```

- Dijkstra (EWD 1305): *putting the cart before the horse* (Wagen = Programm, Pferd = Beweis)

### Programm-Korrektheit: intrinsisch

- Datentyp nicht List Nat, sondern

```

data Mono : Set where nil : Mono
  cons : (x : Nat) -> (ys : Mono)
    -> x <=* ys -> Mono
  insert : Nat -> Mono -> Mono

```

jede Listenzelle enthält Beweis (Beweis ist intrinsisch)

dieser ist bei Konstruktion anzugeben, das wird durch Typ erzwungen

- der dabei benutzte Typ `<=*` ist durch simultane Rekursion zu definieren, syntaktische Möglichkeiten:

mutual-Block, Vorwärts-Deklarationen

### Vollständige Spezifikation und Impl.

- `sort xs` ist eine monoton steigende *Permutation von xs*
- `insert x ys` ist eine monoton steigende Permutation von `cons x ys`
- wird schon benötigt bei

```

insert x (cons y ys _) with x <=? y
... | no _ = cons y (insert x ys) _

```

hier ist `y <* insert x ys` zu zeigen, man hat nur `y <* ys`

## Ergänzungen, Aufgaben

1. Bsp. Sortieren abschließen
2. schwache und starke Monotonie von (Peano-)arithmetischen Operationen (definiere  $\_<\_, \dots$ )
3. Code-Vervollständigung (in Agda-Emacs-Mode) in Gleichungsketten
4. Die Dyck-Sprache ist definiert durch kontextfreie Grammatik mit Regeln  $D \rightarrow \epsilon \mid aDbD$ .

$w \in D$  wird durch `Dyck w` modelliert:

```
data List (E : Set) : Set -- wie gehabt
data Sigma : Set where a : Sigma ; b : Sigma
data Dyck : List Sigma -> Set where
  d0 : Dyck nil
  d1 : {u v : List Sigma}
      -> Dyck u -> Dyck v -> Dyck (cons a (app u (cons b v)))
```

Formalisieren und beweisen Sie  $D \cdot D \subseteq D$

Formalisieren Sie die Lukasiewicz-Sprache  $L \rightarrow b \mid aLL$ .

```
data Lukas : List Sigma -> Set where ...
```

Beweisen Sie  $D \cdot b \subseteq L$ , formalisiert als

```
prop1 : {w : List Sigma}
  -> Dyck w -> Lukas (app w (cons B nil))
```

Formalisieren Sie die Behauptung  $D \cdot b \supseteq L$ .

Beweis ist (m.E.) etwas umständlicher.

## 18 Code-Erzeugung, Beweis-Irrelevanz

### Motivation, Beispiel

- Jesper Cockx et al., *Reasonable Agda is Correct Haskell*, Haskell Symposium, 2022. (extracting verified and readable Haskell code from an Agda program) <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3546189.3549920> <https://agda.github.io/agda2hs/>
- ```
data BST (a : Set) {{@0 _ : Ord a}} (@0 lower upper : a) : Set where
  Leaf : (@0 pf : lower <= upper) → BST a lower upper
  Node : (x : a) (l : BST a lower x) (r : BST a x upper)
        → BST a lower upper
```
- der Beweis in `Leaf` sowie Typ-Argumente `lower`, `upper` sind zur Laufzeit *irrelevant*, werden *ausradiert* (*erased*)

### Compile-Zeit-Irrelevanz

- anything prepended by a dot (`.`) is marked irrelevant, which means that it will only be typechecked but never evaluated <https://agda.readthedocs.io/en/latest/language/irrelevance.html>
- Anwendung: intrinsische Beweise in Datenstrukturen.

```
data Exists {A : Set} (P : A -> Set) : Set where
  exists : (x : A) -> .(y : P x) -> Exists {A} P
```

Existenz genügt für Korrektheit, Beweis-Form ist egal

- ... außer für die Konstruktion anderer Beweise (= Verwendung eines irrelevanten Arguments in einem irrelevanten Kontext)
- irrelevante Argumente werden bei Unifikation ignoriert

### Laufzeit-Irrelevanz

- Values marked as erased (`@0`) are not present at run time, type checker enforces that no [hinzugefügt: *run time*] computations depend on erased values. <https://agda.readthedocs.io/en/latest/language/runtime-irrelevance.html>
- ```
data Vec (A : Set a) : @0 Nat → Set a where
  [] : Vec A 0
  _  : { @0 n } → A → Vec A n → Vec A (suc n)
```
- Compile-Zeit-Irrelevanz ist die strengere Forderung (mit ausradierten Werten kann zur Compile-Zeit gerechnet werden)

## Anwendung: Terminations-Zertifikate

- (in Bearbeitung) Heinke, Hofbauer, Waldmann: *Certified Termination in Agda*, 2023–  
<https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/cetera>  
die Vorlage ist: Thieman et al., *IsaFoR/CeTA: An Isabelle/HOL Formalization of Rewriting*, 2009–
- Ziel ist ein *formal verifiziertes* Programm  $P : (R : \text{Terminationsproblem}) \rightarrow (B : \text{Terminationszertifikat}) \rightarrow \text{Dec}(R \text{ terminiert wegen } B)$   
Bsp:  $R = \{ab \rightarrow ba\}$ ,  $B = \{a : \lambda x.2x, b : \lambda x.x + 1\}$
- Agda-Compiler prüft  $P.agda$ , erzeugt  $P.hs$ , dabei wird  $\text{Dec} (@0 \_)$  ausradiert zu  $\text{Bool}$

## Certified Termination Competition

- (jährlich) <https://termcomp.github.io/Y2024/>  
SRS, show scores, matchbox, s6: 1406, s6-cert: 1304
- was fehlt (in CeTA derzeit)? Verifikation der Methode *Sparse Tiling*, Geser, Hofbauer, Waldmann, FSCD 2020 <https://arxiv.org/abs/2003.01696>  
warum ist das aufwendig? siehe Konstruktion mit 55 Regeln auf Seite 27
- warum sollte man Terminationsverfahren verifizieren?  
Bsp: Tippfehler in Publikation KKST01, vgl. <https://git.imn.htwk-leipzig.de/waldmann/pure-matchbox/-/blob/master/src/Matchbox/KKST01.hs>
- Nebenwirkung: Testfall für Agda2hs, MAlonzo

# 19 Zusammenfassung, Ausblick

## Kernaussagen

- formale Methoden und Werkzeuge ...
- zur Lösung von Anwendungsaufgaben (Constraint-Programmierung),
  - anwendungsspezifische logische Formel,
  - generische bereichsspezifische Such/Lösungsverfahren

- zur Konstruktion korrekter Software
  - Beweis-Überprüfung,
  - intrinsische Beweise
  - interaktive Programm/Beweis-Konstruktion,

### **Constraint-Programmierung**

- anwendungsspezifische logische Formel,  
generische bereichsspezifische Such/Lösungsverfahren
- CP ist eine Form der deklarativen Programmierung
- typische Anwendungsfälle für CP mit Formeln ohne Quantoren, mit freien Variablen, Solver sagt:
  - JA: beweist Existenz-Aussage, rekonstruiere Lösung der Anwendungsaufgabe aus Modell
  - NEIN: das beweist All-Aussage (z. B. Implementierung erfüllt Spezifikation für jede Eingabe)

### **Kernthemen**

Aussagenlogik (SAT)

- Grundlagen: Formeln, Resolution, DPLL, CDCL
- Anw.: SAT-Kod. für kombinatorische Aufgaben

Prädikatenlogik: Bereiche und -spezifische Verfahren:

- Zahlen: lineare Ungleichungen (Fourier-Motzkin),

Prädikatenlogik: allgemeine und spezielle Verfahren:

- Kombination von Theorie-Löser und SAT-Löser (DPLL(T))
- Bit-Blasting für finite-domain-Constraints

## Typische Anwendungen

- Ressourcen-Zuordnungs-, -Optimierungs-Aufgaben mit
  - nicht linearen Funktionen
  - nicht nur konjunktiver Verknüpfung von Teilbedingungen
- Hardware-Verifikation: digitale Schaltnetze, Schaltwerke
- Software-Verifikation:
  - bounded model checking,
  - Terminations-Analyse, siehe  
*Constraint Programming for Analysis of Rewriting*, 13th Intl. School on Rewriting, Tbilisi, 2022, <https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/22/isr/>

## Geschichte der Constraint-Progr. (I)

- Lineare Optimierung (Dantzig 1947 et al.)  
⇒ Mixed Integer LP (Gomory 195\* et al.) [https://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/builders/builders\\_gomory.html](https://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/builders/builders_gomory.html)
- PROLOG (Kowalski 1974)
  - löst Unifikations-Constraints über Bäumen
  - mit fixierter Suchstrategie (SLD-Resolution)  
⇒ Constraint Logic Programming (spezielle Syntax und Strategien für Arithmetik, endliche Bereiche)  
*Global constraints in CHIP*: Beldiceanu, Contejean 1994 [http://dx.doi.org/10.1016/0895-7177\(94\)90127-9](http://dx.doi.org/10.1016/0895-7177(94)90127-9)

## Geschichte der Constraint-Progr. (II)

- fixierte, bekannte Suchstrategie: PROLOG
- Strategie innerhalb des CP bestimmt: gecode

- (praktisch unbekannte) Strategie im externen Solver:
  - SAT
    - \* DPLL: Martin Davis, Hilary Putnam (1960), George Logemann, Donald W. Loveland (1962),
    - \* SAT ist NP-vollst. (Steven Cook, Leonid Levin, 1971)
    - \* CDCL: J.P Marques-Silva, Karem A. Sakallah (1996)
  - SMT
    - \* DPLL(T): the *lazy* approach to SMT
    - \* Yices 2006,
    - \* Z3 (de Moura, Bjorner, 2008)

### **Themen für Bachelor/Master-Arbeiten CP**

- Dokumentation, Messung und Verbesserung von ersatz:
  - Relationen (BA abgeschlossen)
  - Zahlen mit type-level Länge und Überlauf
  - Anzahl-Constraints
- Vergleich von propositionaler und funktionaler Kodierung bei klassischen (publizierten) Testfällen
- Anwendungsfallstudien SMT (Hasmtlib)
- Methoden zur Analyse von SAT/SMT-Kodierungen
  - automat. Prüfen (Herstellen?) d. Forcing-Eigenschaft
  - Rückübertragung von Laufzeitinformation (wer wird eliminiert/propagiert) auf Quelltext-Ebene

### **Themen für Bachelor/Master-Arbeiten Agda**

- Agda-Lückentextaufgabe für autotool
- cetera (Verifikation von Terminations-Zertifikaten)
  - matchbox (Suche nach Zertifikaten)
  - TPDB (Suche nach kleinen/schweren Terminationsproblemen)

- zu Termination siehe auch 20th Intl. Workshop on Termination (September 2025)  
<https://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/WST2025/>  
ich suche SHK für Konferenz-Vorbereitung und -Durchführung (Badges austeilen, Kaffee kochen, ...)