Compilerbau Vorlesung

Johannes Waldmann, HTWK Leipzig

WS 08-11,13,15,17,19,SS 22,24,WS 25

Einleitung

Beispiel: C-Compiler

```
• int gcd (int x, int y) {
    while (y>0) { int z = x%y; x = y; y = z;
    return x; }
```

• gcc -S -O2 gcd.c erzeugt gcd.s:

```
.L3: movl %edx, %r8d; cltd; idivl %r8d movl %r8d, %eax; testl %edx, %edx jq .L3
```

Ü: was bedeutet cltd, warum ist es notwendig?

Ü: welche Variable ist in welchem Register?

• identischer (!) Assembler-Code für

```
int gcd_func (int x, int y) {
  return y > 0 ? gcd_func (y,x % y) : x;
}
```

- vollständige Quelltexte: siehe Repo
- Bsp Java-Kompilation: https://www.imn.
 htwk-leipzig.de/~waldmann/etc/safe-speed/
- Bsp Haskell-Kompilation:

MicroHS (Lennart Augustsson, Haskell Symposium 2024, https://github.com/augustss/MicroHs/blob/master/doc/hs2024.pdf)

Inhalt der Vorlesung

Konzepte von Programmiersprachen

- Semantik von einfachen (arithmetischen) Ausdrücken
- lokale Namen,
 Unterprogramme (Lambda-Kalkül)
- Zustandsänderungen (imperative Prog.)
- Continuations zur Ablaufsteuerung

realisieren durch

Interpretation,
 Kompilation

Hilfsmittel:

- Theorie: Inferenzsysteme (f. Auswertung, Typisierung)
- Praxis: Haskell, Monaden (f. Auswertung, Parser)

Einleitung: Sprachverarbeitung

- mit Interpreter:
 - Quellprogramm, Eingaben Interpreter Ausgaben
- mit Compiler:

 - Eingaben
 Zielprogramm
 Ausgaben
- Mischform:

 - Zwischenprogramm, Eingaben virtuelle Maschine Ausgaben
- reale Maschine (CPU) ist Interpreter f
 ür Maschinensprache (Interpretation in Hardware, in Microcode)
- gemeinsam ist: syntaxgesteuerte Semantik (Ausführung oder Übersetzung)

Typeset by FoilT_EX –

Literatur

 Franklyn Turbak, David Gifford, Mark Sheldon: Design Concepts in Programming Languages, MIT Press, 2008.

```
http://cs.wellesley.edu/~fturbak/
```

 Guy Steele, Gerald Sussman: Lambda: The Ultimate Imperative, MIT Al Lab Memo AIM-353, 1976 (the original 'lambda papers',

```
https://web.archive.org/web/20030603185429/http://library.readscheme.org/page1.html)
```

- Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi and Jeffrey D. Ullman:
 Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd edition)
 Addison-Wesley, 2007, http://dragonbook.stanford.edu/
- J. Waldmann: *Das M-Wort in der Compilerbauvorlesung*, Workshop der Gl-Fachgruppe Prog. Spr. und Rechnerkonzepte, 2013 http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/talk/13/fg214/

Anwendungen von Techniken des Compilerbaus

- Implementierung h\u00f6herer Programmiersprachen
- architekturspezifische Optimierungen (Parallelisierung, Speicherhierarchien)
- Entwurf neuer Architekturen (RISC, spezielle Hardware)
- Programm-Übersetzungen (Binär-Übersetzer, Hardwaresynthese, Datenbankanfragesprachen)
- Software-Werkzeuge (z.B. Refaktorisierer)
- domainspezifische Sprachen

Organisation der Vorlesung

- pro Woche eine Vorlesung, eine Übung.
- in Vorlesung, Übung und Hausaufgaben:
 - Theorie,
 - Praxis: Quelltexte (weiter-)schreiben
- Prüfungszulassung: regelmäßiges und erfolgreiches Bearbeiten von Übungsaufgaben
- Prüfung: Klausur (120 min, keine Hilfsmittel)
 Bei Interesse und nach voriger Absprache: Ersatz eines Teiles der Klausur durch vorherige Hausarbeit
 - z.B. Reparaturen an autotool-Aufgaben oder anderem open-source-Projekt (Ihrer Wahl), bei denen Techniken des Compilerbaus angewendet werden

Typeset by FoilT_EX –

Beispiel: Interpreter f. arith. Ausdrücke

```
data Exp = Const Integer
         | Plus Exp Exp | Times Exp Exp
    deriving (Show)
ex1 :: Exp
ex1 =
  Times (Plus (Const 1) (Const 2)) (Const 3)
value :: Exp -> Integer
value x = case x of
    Const i -> i
    Plus x y \rightarrow value x + value y
    Times x y \rightarrow value x * value y
```

das ist syntax-gesteuerte Semantik:

Wert des Terms wird aus Werten der Teilterme kombiniert

Beispiel: lokale Variablen und Umgebungen

```
data Exp = ... | Let String Exp Exp | Ref String
ex2 :: Exp
ex2 = Let "x" (Const 3)
     ( Times ( Ref "x" ) (Ref "x" ) )
type Env = ( String -> Integer )
extend n w e = \ m \rightarrow if m == n then w else e m
value :: Env -> Exp -> Integer
value env x = case x of
    Ref n \rightarrow env n
    Let n x b -> value (extend n (value env x) env) b
    Const i -> i
    Plus x y \rightarrow value env x + value env y
    Times x y \rightarrow value env x * value env y
test2 = value (\ \_ -> 42) ex2
```

Bezeichner sind Strings — oder nicht?

- ... | Let String Exp Exp wirklich?
- es gilt type String = [Char], also
 - einfach verkettete Liste von Zeichen
 - mit Bedarfsauswertung (lazy Konstruktoren)
- das ist
 - ineffizient (in Platz und Zeit)
 - egal (für unseren einfachen Anwendungsfall)
 - gefährlich (wenn man es für andere Anwendungen übernimmt)
- deswegen jetzt schon Diskussion . . .
 - von alternativen Implementierungen
 - und wie man diese versteckt

- Typeset by FoilT_EX -

Datentypen für Folgen (von Zeichen)

- type String = [Char]: einfach verkettet, lazy: ist in den allermeisten Fällen unzweckmäßig
- data Vector a: Array (d.h., zusammenhängender Speicherbereich, deswegen effiziente Indizierung) mit kostenlosem slicing (Abschnitt-Bildung)
- ◆ data Bytestring: ≈ Vektor von Bytes (d.h., für rein binären Datenaustausch)
- data Text (aus Modul Data.Text) efficient packed,
 immutable Unicode text type, (d.h., Zeichen = Bytefolge)
- Modul Data.Text.Lazy: lazy Liste von (strikten)
 Text-Abschnitten, für Stream-Verarbeitung

- Typeset by FoilT_EX -

Verstecken von Implementierungsdetails

Implementierung direkt sichtbar:

```
data Exp = ... \mid Let Text Exp Exp
```

• Verschieben der Implementierungs-Entscheidung:

```
type Id = Text; data Exp = ... | Let Id Exp bleibt aber sichtbar (type-Deklarationen werden bei Kompilation immer expandiert)
```

Verstecken der Entscheidung:

```
modul Id (Id) where data Id = Id Text exportiert wird Typ-Name, aber nicht der Konstruktor der Anwender (Importeur) von Id sieht Text nicht
```

data-Deklaration mit genaue einem Konstruktor:
 erstetzen durch newtype Id = Id Text
 dieser kostet gar nichts (keine Zeit, keinen Platz)

Verwendung standardisierter Namen

• alle benötigten Funktionen (einschl. Konstruktoren) für Id implementieren und exportieren (es sind nicht viele)

```
eqId::Id->Id->Bool; eqId (Id s) (Id t) = s == t
```

 ◆ diese spezifischen Namen will sich keiner merken ⇒ verwende standardisierte Typklassen, Bsp.

```
instance Eq Id where (Id s) == (Id t) = s == t
```

der Importeur von Id sieht den Namen (==) bereits, weil er in Prelude definiert ist

 wenn die Implementierung einer standardisierten Klasse eine einfache Delegation ist, kann sie vom Compiler erzeugt werden

```
newtype Id = Id Text deriving Eq
```

Einsparung von Konstruktor-Aufrufen

```
-- Implementierung des Konstruktors
import qualified Data.Text as T
fromString::String->Id;fromString s = Id (T.pack s)
-- Anwendung:
foo :: Id ; foo = fromString "bar"
```

der Schreibaufwand wird verringert durch

```
-- bei Implementierung:
import Data.String;
instance IsString Id where fromString = T.pack
-- bei Anwendung:
{-# language OverloadedStrings #-}
foo :: Id ; foo = "bar"
```

String-Literale sind dann *überladen* ⇒ Compiler setzt fromString vor jedes ("bar"⇒fromString "bar")

Übung (Haskell)

- Wiederholung Haskell
 - Interpreter/Compiler: ghci http://haskell.org/
 - Funktionsaufruf nicht f (a,b,c+d), sondern f a b (c+d)
 - Konstruktor beginnt mit Großbuchstabe und ist auch eine Funktion
- Wiederholung funktionale
 Programmierung/Entwurfsmuster
 - rekursiver algebraischer Datentyp (ein Typ, mehrere Konstruktoren)
 (OO: Kompositum, ein Interface, mehrere Klassen)

- rekursive Funktion
- Wiederholung Pattern Matching:
 - beginnt mit case ... of, dann Zweige
 - jeder Zweig besteht aus Muster und Folge-Ausdruck
 - falls das Muster paßt, werden die Mustervariablen gebunden und der Folge-Ausdruck auswertet

- Typeset by FoilT_EX -

Übung (Interpreter)

• Benutzung:

- Beispiel für die Verdeckung von Namen bei geschachtelten Let
- Beispiel dafür, daß der definierte Name während seiner Definition nicht sichtbar ist

• Erweiterung:

Verzweigungen mit C-ähnlicher Semantik:

Bedingung ist arithmetischer Ausdruck, verwende 0 als Falsch und alles andere als Wahr.

Übung (effiziente Imp. von Bezeichnern)

- welche Operationen auf Id werden benötigt?
 - Konstruktion (fromString)
 - Gleichheit
 - Ausgabe (nur für Fehlermeldungen!)
- für newtype Id = Id Text deriving Eq: wie teuer ist Vergleich? wie könnte man das verbessern?
- für type Env und extend wie angegeben: wie teuer ist das Aufsuchen des Wertes eines Namens in einer Umgebung, die durch n geschachtelte extend entsteht? wie könnte man das verbessern?

Hinweis: mit Env als Funktion: gar nicht.

Welcher andere Typ könnte verwendet werden?

Typeset by FoilT_EX –

Inferenz-Systeme

Motivation

- inferieren = ableiten
- Inferenzsystem I, Objekt O, Eigenschaft $I \vdash O$ (in I gibt es eine Ableitung für O)
- damit ist I eine Spezifikation einer Menge von Objekten
- man ignoriert die *Implementierung* (= das Finden von Ableitungen)
- Anwendungen im Compilerbau:
 Auswertung von Programmen, Typisierung von Programmen

Definition

ein Inferenz-System I besteht aus

- Regeln (besteht aus Prämissen, Konklusion) Schreibweise $\frac{P_1,\dots,P_n}{K}$
- Axiomen (= Regeln ohne Prämissen)
- eine Ableitung für F bzgl. I ist ein Baum:
- jeder Knoten ist mit einem Objekt beschriftet
- jeder Knoten (mit Vorgängern) entspricht Regel von I
- Wurzel (Ziel) ist mit F beschriftet

Def: $I \vdash F : \iff \exists I$ -Ableitungsbaum mit Wurzel F.

Regel-Schemata

- um unendliche Menge zu beschreiben, benötigt man unendliche Regelmengen
- diese möchte man endlich notieren
- ein Regel-Schema beschreibt eine (mglw. unendliche) Menge von Regeln, Bsp: $\frac{(x,y)}{(x-y,y)}$
- Schema wird instantiiert durch Belegung der Schema-Variablen

Bsp: Belegung $x\mapsto 13, y\mapsto 5$ ergibt Regel $\frac{(13,5)}{(8,5)}$

Inferenz-Systeme (Beispiel)

- Grundbereich = Zahlenpaare $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- Axiom: $\frac{}{(13,5)}$
- Regel-Schemata: $\frac{(x,y)}{(x-y,y)}$, $\frac{(x,y)}{(x,y-x)}$
- gilt $I \vdash (1,1)$?
- Ü: Beziehung zu einem alten Algorithmus (früh im Studium, früh in der Geschichte der Menschheit)

Primalitäts-Zertifikate

• Satz: $p \in \mathbb{P} \iff \exists g: g \text{ ist } primitive Wurzel \mod p$: $[g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{p-2}] \text{ ist } Permutation von } [1, 2, \ldots, p-1]$ let $\{p = 7; g = 3\}$ in map ('mod' p) $\{p = 3\}$ take $\{p-1\}$ $\{p = 3\}$ iterate $\{p = 3\}$ $\{p = 3\}$ if $\{p = 3\}$ $\{$

- Inferenzregel $\frac{g_1:p_1,\ldots,g_k:p_k}{g:p}$, falls $p-1=q_1^{e_1}\cdots q_k^{e_k}$ und $\forall i:g^{(p-1)/q_i}\neq 1\mod p$
- Vaughan Pratt, Each Prime has a Succinct Certificate, SIAM J. Comp. 1975
- es folgt $\mathbb{P} \in \mathsf{NP} \cap \mathsf{co}\text{-}\mathsf{NP}$, aber \mathbb{P} not known to be in P
- Agrawal, Kayal, Saxena: Primes is in P, 2004

Inferenzsystem: (aussagenlog.) Resolution

- Grundbereich: disjunktive Klauseln
- ullet Inferenz-Regel: $rac{p_1 ee \cdots ee p_i ee q, \
 eg q ee r_1 ee \cdots ee r_j}{p_1 ee \cdots ee p_i ee r_1 ee \cdots ee r_j}$
- Beispiel: $\{p \lor q, \neg q \lor r\} \vdash p \lor r$
- Def. Formel F folgt aus Formelmenge M: $M \models F :=$

$$\forall b : (\forall G \in M : \operatorname{Wert}(G, b) = 1) \Rightarrow \operatorname{Wert}(F, b) = 1$$

- Beziehungen zw. Syntax (Resolution) und Semantik (Folgerung)
 - Resolution ist korrekt: $(M \vdash F) \Rightarrow (M \models F)$
 - Resolution ist widerlegungsvollständig:

$$(M \models \emptyset) \Rightarrow (M \vdash \emptyset)$$

Inferenz von Typen

 später implementieren wir das, als statische Analyse im Interpreter/Compiler,

jetzt geben wir nur die Regel an: $\frac{f:T_1
ightarrow T_2, x:T_1}{fx:T_2}$

 Bsp. für Verwendung eines Inferenzsystems: Manuel Chakravarty, Gabriele Keller, Simon Peyton Jones, Simon Marlow, Associated Types with Class, POPL 2005

Absch. 4.2 (Fig. 2) Grundbereich: $\Theta|\Gamma\vdash e:\sigma$

means that in type environment Γ and instance environment Θ the expression e has type σ

Bsp. für ein Regelschema: $\frac{(v:\sigma) \in \Gamma}{\Theta|\Gamma \vdash v:\sigma}(\textit{var})$

Inferenz von Werten

ullet Grundbereich: Aussagen $\operatorname{wert}(p,z)$ mit $p\in\operatorname{Exp}$, $z\in\mathbb{Z}$

- Axiome: wert(Constz, z)
- Regeln:

$$\frac{\mathrm{wert}(X,a),\mathrm{wert}(Y,b)}{\mathrm{wert}(\mathrm{Plus}\;X\;Y,a+b)},\quad \frac{\mathrm{wert}(X,a),\mathrm{wert}(Y,b)}{\mathrm{wert}(\mathrm{Times}\;X\;Y,a\cdot b)},\ldots$$

das ist syntaxgesteuerte Semantik:

für jeden Konstruktor von $p \in Exp$ gibt es genau eine Regel mit Konklusion wert (p, \dots)

Umgebungen (Spezifikation)

- Grundbereich: Aussagen der Form wert(E,p,z) (in Umgebung E hat Programm p den Wert z) Umgebungen konstruiert aus \emptyset und E[v:=b]
- ullet Regeln für Operatoren $\dfrac{\mathrm{wert}(E,X,a),\mathrm{wert}(E,Y,b)}{\mathrm{wert}(E,\mathrm{Plus}XY,a+b)},\ldots$
- $\bullet \ \operatorname{Regeln} \ \operatorname{für} \ \operatorname{Umgebungen} \ \overline{\operatorname{wert}(E[v:=b],\operatorname{Ref} \ v,b)},$

$$\frac{\mathrm{wert}(E,\mathrm{Ref}\ v',b')}{\mathrm{wert}(E[v:=b],\mathrm{Ref}\ v',b')}\ \mathrm{f\"{u}r}\ v\neq v'$$

 \bullet Regeln für Bindung: $\frac{\mathrm{wert}(E,X,b),\mathrm{wert}(E[v:=b],Y,c)}{\mathrm{wert}(E, \mathrm{let}\; v=X\;\mathrm{in}\; Y,c)}$

Umgebungen (Implementierung)

Umgebung ist (partielle) Funktion von Name nach Wert

Realisierungen: type Env = String -> Integer Operationen:

- empty :: Env leere Umgebung
- lookup :: Env -> String -> Integer

Notation: e(x)

• extend :: String -> Integer -> Env -> Env

Notation: e[v := z]

Beispiel

lookup (extend "y" 4 (extend "x" 3 empty)) "x" entspricht ($\emptyset[x:=3][y:=4])x$

Aufgaben Inferenz

- 1. Primalitäts-Zertifikate
 - welche von 2, 4, 8 sind primitive Wurzel mod 101?
 - vollst. Primfaktorzerlegung von 100 angeben
 - ein vollst. Prim-Zertifikat für 101 angeben.
 - bestimmen Sie 2^{(101-1)/5} mod 101 von Hand Hinweise: 1. das sind *nicht* 20 Multiplikationen,
 2. es wird *nicht* mit riesengroßen Zahlen gerechnet.
- Geben Sie den vollständigen Ableitungsbaum an für die Auswertung von

```
let \{x = 5\} in let \{y = 7\} in x
```

3. warum ist aussagenlog. Resolution nicht vollständig? (es

gilt nicht: $(M \models F) \Rightarrow (M \vdash F)$.) Ein einfaches Gegenbeispiel reicht.

4. ein Paper aus POPL heraussuchen, das Inferenzsysteme verwendet zur Beschreibung von statischer oder dynamische Semantik einer Programmiersprache

Semantische Bereiche

- bisher: Wert eines arithmetischen Ausdrucks ist Zahl.
- jetzt erweitern (Motivation: if-then-else mit richtigem Typ):

• typische Verarbeitung:

```
value env x = case x of
Plus l r ->
  case value env l of
  ValInt l ->
  case value env r of
  ValInt r ->
  ValInt ( i + j )
```

Continuations

Programmablauf-Abstraktion durch Continuations:

```
with_int :: Val -> (Int -> Val) -> Val
with_int v k = case v of
   ValInt i -> k i
   _ -> error "expected ValInt"
```

k ist die *continuation* (die Fortsetzung im Erfolgsfall)

• eben geschriebenen Code refaktorisieren zu:

```
value env x = case x of
  Plus l r ->
    with_int ( value env l ) $ \ i ->
    with_int ( value env r ) $ \ j ->
    ValInt ( i + j )
```

Aufgaben

- 1. Bool im Interpreter
 - Boolesche Literale
 - relationale Operatoren (==, <, o.ä.),
 - Inferenz-Regel(n) für Auswertung des If
 - Implementierung der Auswertung von if/then/else mit with_bool,
- 2. Striktheit der Auswertung
 - einen Ausdruck e :: Exp angeben, für den value undefined e eine Exception ist (zwei mögliche Gründe: nicht gebundene Variable, Laufzeit-Typfehler)
 - mit diesem Ausdruck: diskutiere Auswertung von
 let {x = e} in 42

3. bessere Organisation der Quelltexte

- Cabalisierung (Quelltexte in src/,
 Projektbeschreibungsdatei cb.cabal), Anwendung:
 cabal repl usw.
- separate Module für Exp, Env, Value,

- Typeset by FoilT_EX -

Unterprogramme

Beispiele

- in verschiedenen Prog.-Sprachen gibt es verschiedene Formen von Unterprogrammen:
 - Prozedur, sog. Funktion, Methode, Operator, Delegate, anonymes Unterprogramm
- allgemeinstes Modell:
 - Kalkül der anonymen Funktionen (Lambda-Kalkül),

- Typeset by FoilT_EX -

Interpreter mit Funktionen

abstrakte Syntax:

```
data Exp = ...
  | Abs { par :: Name , body :: Exp }
  | App { fun :: Exp , arg :: Exp }
```

konkrete Syntax:

```
let { f = \ x -> x * x } in f (f 3)
```

konkrete Syntax (Alternative):

```
let { f x = x * x } in f (f 3)
```

Semantik (mit Funktionen)

• erweitere den Bereich der Werte:

```
data Val = ... \mid ValFun ( Val -> Val )
```

• erweitere Interpreter:

```
value :: Env -> Exp -> Val
value env x = case x of
... | Abs n b -> _ | App f a -> _
```

- mit Hilfsfunktion with_fun :: Val -> ...
- Testfall (in konkreter Syntax)

```
let { x = 4 } in let { f = \ y \rightarrow x * y }
in let { x = 5 } in f x
```

Let und Lambda

• let $\{x = A\}$ in Q

kann übersetzt werden in

$$(\ x \rightarrow Q) A$$

• let { x = a , y = b } in Q
wird übersetzt in ...

beachte: das ist nicht das let aus Haskell

Mehrstellige Funktionen

- ... simulieren durch einstellige:
- mehrstellige Abstraktion:

mehrstellige Applikation:

$$f P Q R := ((f P) Q) R$$

(die Applikation ist links-assoziativ)

der Typ einer mehrstelligen Funktion:

$$T1 \rightarrow T2 \rightarrow T3 \rightarrow T4 :=$$
 $T1 \rightarrow (T2 \rightarrow (T3 \rightarrow T4))$

(der Typ-Pfeil ist rechts-assoziativ)

Semantik mit Closures

• bisher: ValFun ist Funktion als Datum der Gastsprache

```
value env x = case x of ...
Abs n b -> ValFun $ \ v ->
    value (extend n v env) b
App f a ->
    with_fun ( value env f ) $ \ g ->
    with_val ( value env a ) $ \ v -> g v
```

• alternativ: Closure: enthält Umgebung env und Code b

```
value env x = case x of ...
Abs n b -> ValClos env n b
App f a -> ...
```

Closures (Spezifikation)

Closure konstruieren (Axiom-Schema):

$$\overline{\mathrm{wert}(E,\lambda n.b,\mathrm{Clos}(E,n,b))}$$

Closure benutzen (Regel-Schema, 3 Prämissen)

$$\mathsf{wert}(E_1, f, \mathsf{Clos}(E_2, n, b)),$$
 $\mathsf{wert}(E_1, a, w), \mathsf{wert}(E_2[n := w], b, r)$ $\mathsf{wert}(E_1, fa, r)$

- Ü: Inferenz-Baum für Auswertung des vorigen Testfalls (geschachtelte Let) zeichnen
- ...oder Interpreter so erweitern, daß dieser Baum ausgegeben wird

Rekursion?

Das geht nicht, und soll auch nicht gehen:

```
let \{x = 1 + x\} in x
```

aber das hätten wir doch gern:

```
let { f = \ x \rightarrow if \ x > 0
then x * f (x -1) else 1
} in f 5
```

(nächste Woche)

 aber auch mit nicht rekursiven Funktionen kann man interessante Programme schreiben:

Testfall (2)

```
let { t f x = f (f x) }
in let { s x = x + 1 }
in t t t t s 0
```

- auf dem Papier den Wert bestimmen
- mit selbstgebautem Interpreter ausrechnen
- mit Haskell ausrechnen
- in JS (node) ausrechnen

Repräsentation von Fehlern

 Fehler explizit im semantischen Bereich des Interpreters repräsentieren (anstatt als Exception der Gastsprache)

```
data Val = ... | ValErr Text
```

- strikte Semantik: ValErr niemals in Umgebung (bei Let-Bindung oder UP-Aufruf)
- Ü: realisieren durch Aufruf (an geeigneten Stellen) von

```
with_val :: Val -> (Val -> Val) -> Val
with_val v k = case v of
   ValErr _ -> v
   _ -> k v
```

Typeset by FoilT_EX –

Übungen

eingebaute primitive Rekursion (Induktion über Peano-Zahlen):

implementieren Sie die Funktion

```
fold :: r \rightarrow (r \rightarrow r) \rightarrow N \rightarrow r
```

Testfall: fold 1 ($\xspace x - > 2 * x$) 5 == 32

durch data Exp = .. | Fold .. und neuen Zweig
in value

Wie kann man damit die Fakultät implementieren?

- 2. alternative Implementierung von Umgebungen
 - bisher type Env = Id -> Val

• jetzt type Env = Data.Map.Map Id Val oder Data.HashMap

Messung der Auswirkungen: 1. Laufzeit eines Testfalls, 2. Laufzeiten einzelner UP-Aufrufe (profiling)