CRCL: Church–Rosser–Kongruenz–Sprachen

$L = \mathsf{CRCL}(R, N)$, falls

$R = \{l_1 \to r_1, \ldots\}$ endlich

mit $\forall i : |l_i| > |r_i|$ (längenverkürzend),

$\forall u \in \Sigma^* \; \exists! v \in \mathsf{Nf}(R) : \; u \to_R^* v$
(Eindeutigkeit von Normalformen)

$N \subseteq \mathsf{Nf}(R)$ endlich,

$\forall w \in \Sigma^* : w \in L \iff \exists n \in N : w \to_R^* n$

$\mathsf{CRCL} := \{L \mid \exists R, N : L = \mathsf{CRCL}(R, N)\}$

Abschlußeigenschaften von CRCL

Vereinigung: nein. $a^n b^n \cup b^*$

Durchschnitt: nein. $a^n b^n c^* \cup a^* b^n c^n = a^n b^n c^n$

Verkettung: nein. $a^n b^n \cdot a^m b^{2m}$.

Komplement: glaub nich

Pumping–Lemma für CRCL

$\forall L \in$ CRCL $\exists m, n$

$\forall w \in \Sigma^{\geq n}$

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : xyz = w \wedge |y| \leq m$

$\wedge \exists y' : |y'| < |y| \wedge xy'z \in L$

Komplemente von CRCL–Sprachen

Wenn $L = \mathsf{CRCL}(R, N)$ und Σ^*/R endlich
(d. h. $\mathsf{Nf}(R)$ endlich),
dann $\Sigma^* \setminus L = \mathsf{CRCL}(R, \mathsf{Nf}(R) \setminus N)$.

Wenn

$$\begin{aligned}&\forall c\ \forall w \in \Sigma^*\ |w| \geq 2c \rightarrow \\ &\quad \exists x \in \Sigma^*\ \exists y \in L\ \exists z \in \Sigma^*\ xyz = w \wedge |w| - |y| \leq c,\end{aligned}$$

dann $\forall R, N : L = \mathsf{CRCL}(R, N) \rightarrow \mathsf{Nf}(R)$ endlich.

Beispiel: $L = L(s, m)$.

Nicht–Beispiel: $L = \Sigma^* a \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b\}$.

$L = \mathsf{CRCL}(\{\Sigma^{0,1} a \Sigma^{0,1} \rightarrow a\}, \{a\})$.

REG $\subset$ CRCL ?

$L(s, m) := (\Sigma^m)^*$ mit $|\Sigma| = s$

$L(\geq 2, m)$ haben exponentielle Dichte.

Beispiele $L(1, m) = \text{CRCL}(\{a^m \to \epsilon\}, \{\epsilon\})$.

$L(2, 2) = \text{CRCL}(\{aa \to \epsilon, b\Sigma b \to b\}, \{\epsilon, ab, ba, bb\})$.

Was ist mit $L(2, 3), L(3, 2)$?

$L(s, 2) \in \mathsf{CRCL}$

$R := \{xyz \to \max(x, z) \mid x, y, z \in \Sigma, y \leq \min(x, z)\}$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\{aaa\} &\to a \\
\{baa, aab, bab, bbb\} &\to b \\
\{caa, cab, cbb, aac, bac, cac, bbc, cbc, ccc\} &\to c \\
\{daa, dab, dbb, dac, dbc, dcc, aad, bad, cad, dad & \\
, bbd, cbd, dbd, ccd, dcd, ddd\} &\to d \\
\{eaa, eab, ebb, eac, ebc, ecc, ead, ebd, ecd, edd & \\
, aae, bae, cae, dae, eae, bbe, cbe, dbe, ebe, cce & \\
, dce, ece, dde, ede, eee\} &\to e
\end{aligned}
$$

Mehr Sprachen exponentieller Dichte

Beispiel: $\Sigma = \{a, b\}, L = \Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*$

$L = \mathsf{CRCL}(\{aa \to a, bb \to b\} \cup$
$\{\Sigma^p a \Sigma^q b \Sigma^r \to ab \mid 0 \leq p, q, r \leq 2 \wedge p + q + r \geq 1\},$
$\{ab\})$

erweitern auf $\Sigma^* x_1 \Sigma^* \ldots x_n \Sigma^*$?

auf $|\Sigma| > 2$?

Vereinigungen davon?

boolesche Kombinationen davon?

... Straubing–Hierarchie für sternfreie Sprachen