# Der Kombinator S

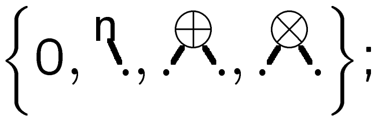
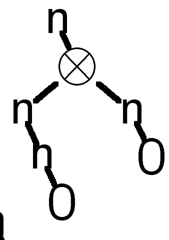
Johannes Waldmann

Institut für Informatik

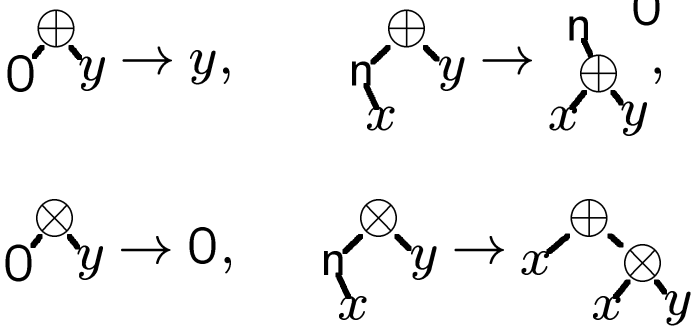
Friedrich-Schiller-Universität

Jena

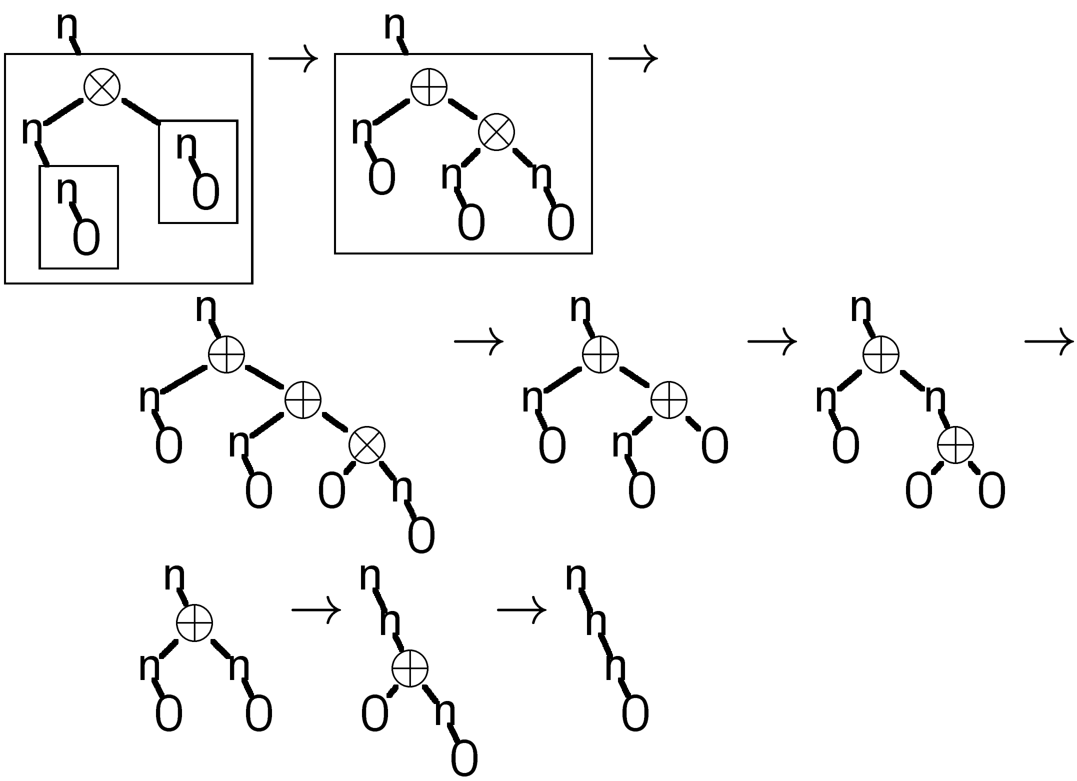
# Term-Ersetzungs-Systeme

Signatur  ; Term 

Regeln



Reduktion



schwache Normalisierung:
$X$ hat *eine* endliche Reduktion

$$
\begin{array}{ccccccc}
X & \to & \cdot & \to & \cdot & \to & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & &
\end{array}
$$

starke Normalisierung:
$X$ hat *nur* endliche Reduktionen

$$
\begin{array}{ccccc}
X & \to & \cdot & \to & \cdot \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}
$$

Wortproblem $\quad X \leftrightarrow^* Y$

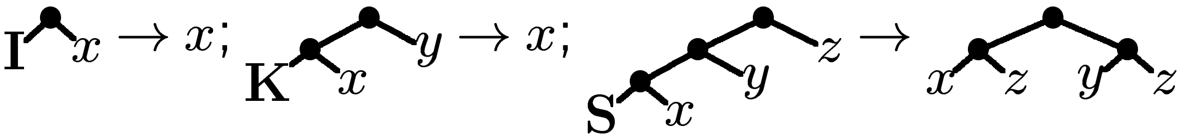
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & \cdot & & & & Y \\
 & & & & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\
X & & & & \cdot & & & & \cdot & & \\
 & \searrow & & \swarrow & & & & & & & \\
 & & \cdot & & & & & & & &
\end{array}
$$

Konfluenz $\quad \forall X, Y, Y' : \exists Z : \begin{array}{ccc} X & \twoheadrightarrow & Y \\ \downarrow\!\!\!\downarrow & & \downarrow\!\!\!\downarrow \\ Y' & \twoheadrightarrow & Z \end{array}$

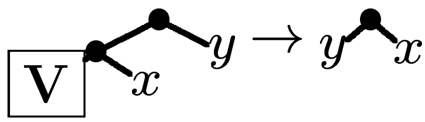
# Kombinatorische Logik

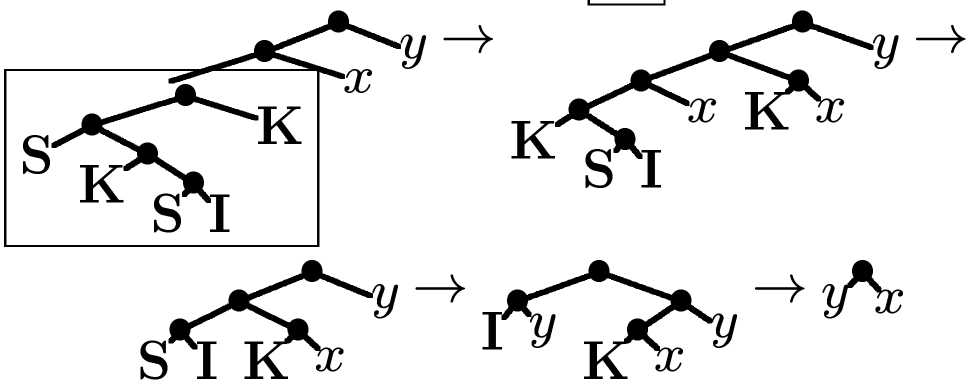
Signatur $\{\cdot\!\curlywedge\!\cdot, \mathbf{S}, \mathbf{K}, \mathbf{I}, \ldots\}$

Kombinatoren

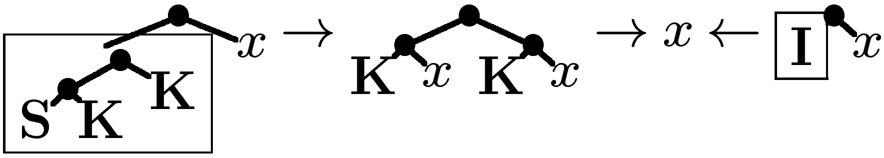


$\{\mathbf{S}, \mathbf{K}, \mathbf{I}\}$ ist Basis. Beispiel:





$\{\mathbf{S}, \mathbf{K}\}$ ist Basis:



$\{\mathbf{S}, \mathbf{K}\}$ ist Basis. $\Rightarrow$
Für $(\mathbf{S}, \mathbf{K})$-Terme sind alle interessanten Eigenschaften unentscheidbar.

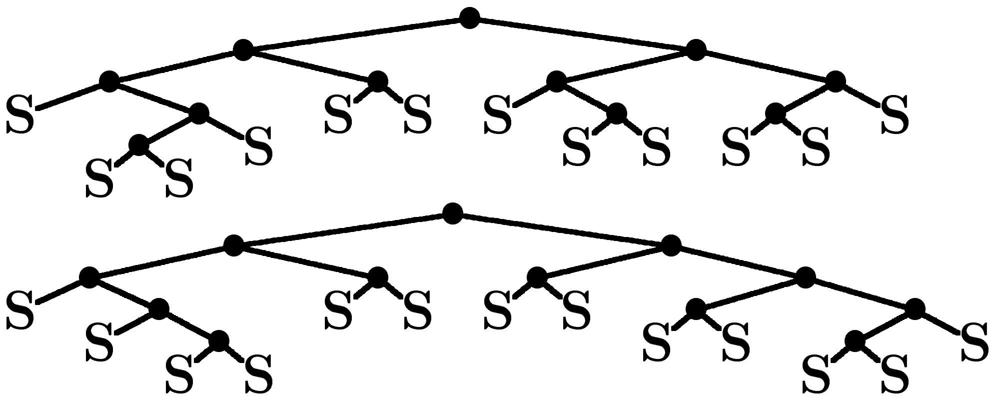
$\mathbf{CL}(\mathbf{K})$ ist trivial.

Barendregt, Bergstra, Klop, Volken 1975 ff.:

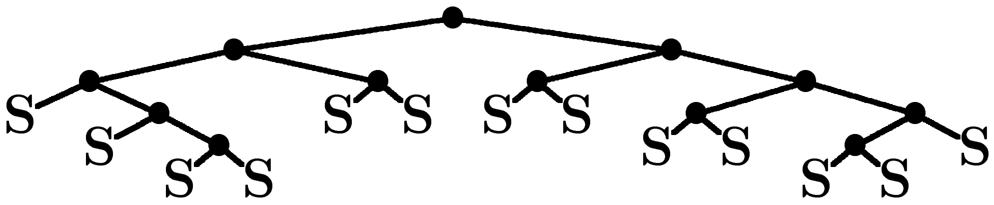
Wie schwer ist $\mathbf{CL}(\mathbf{S})$?

$\mathbf{CL}(\mathbf{S})$ ist orthogonal $\Rightarrow$ konfluent.
$\mathbf{CL}(\mathbf{S})$ ist nicht löschend
$\Rightarrow$ schwache $=$ starke Normalisierung

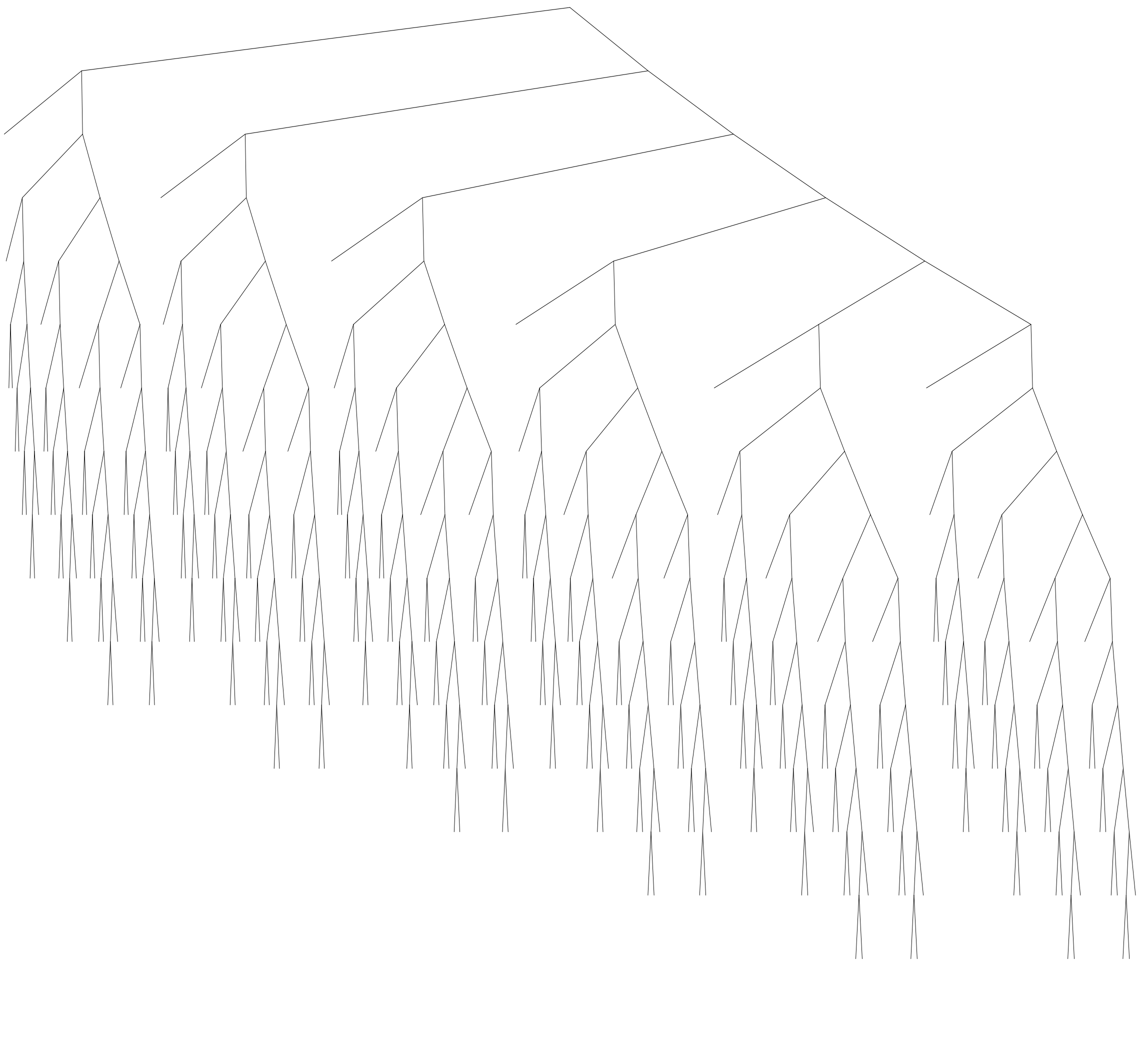
Haben diese Terme eine Normalform?

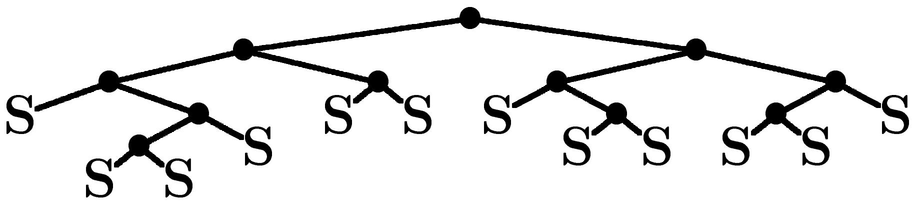


Der Term

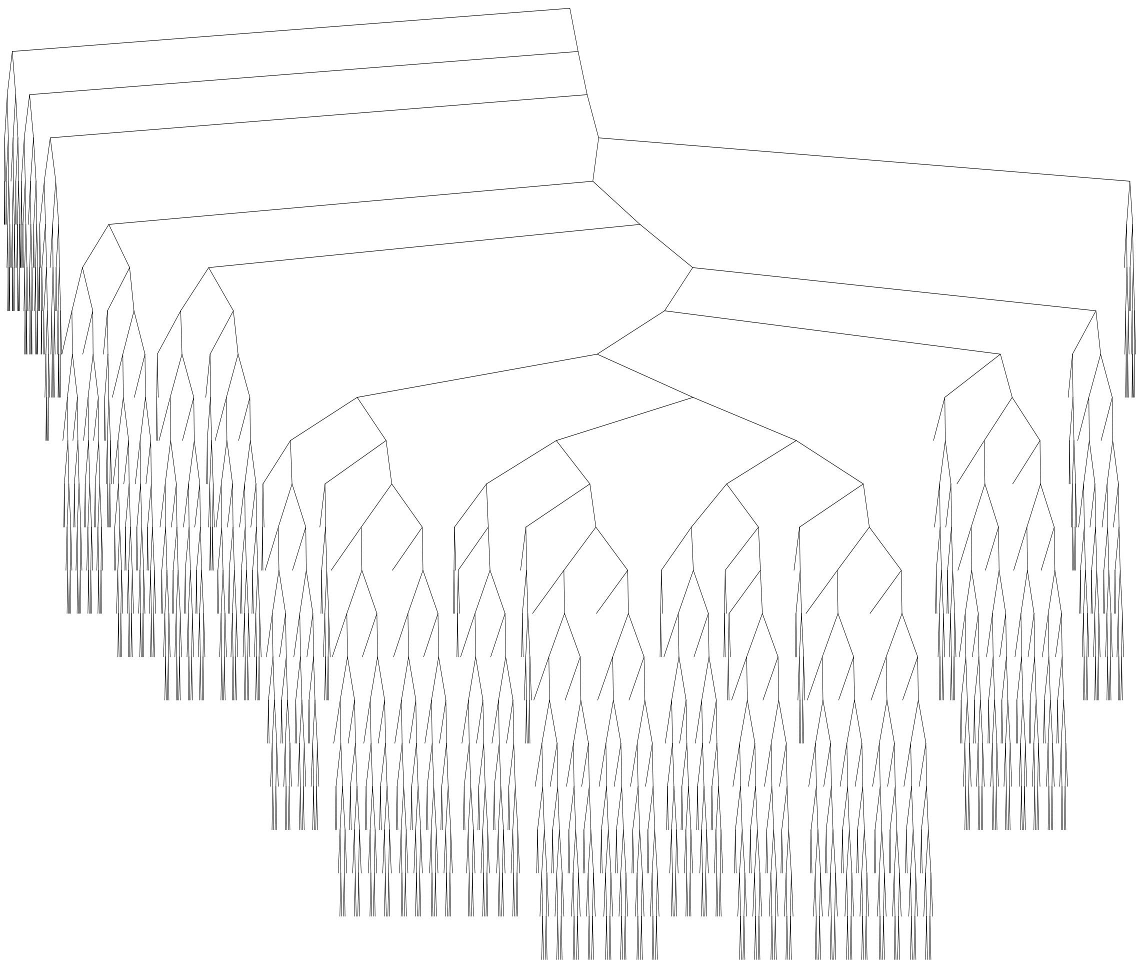



hat Normalform



Der Term 

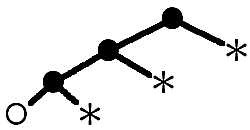

hat keine Normalform. Nach 30 Schritten:



# Rationale Baum-Sprachen

alle $\mathbf{S}$-Terme: $\mathcal{M} \to \mathbf{S} \ \cup$ 

Bezeichnung. $\circ = \mathbf{S}; * = \mathcal{M}$

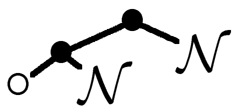
alle Redexe: $\mathcal{R} \to$ 

alle Terme, die Redex enthalten:
$\mathcal{U} \to \mathcal{R} \ \cup$  $\cup$ 

rationale Sprachen sind abgeschlossen unter Booleschen Operationen

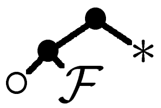
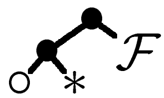
Programm `RX`

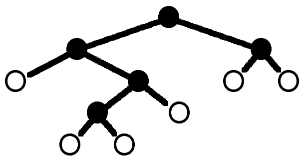
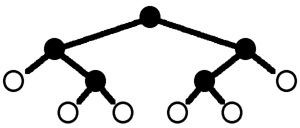
alle Normalformen: $\mathcal{N} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}$

$\mathcal{N} \to \circ \ \cup$  $\cup$ 

# Eine Klasse von Termen ohne Normalform

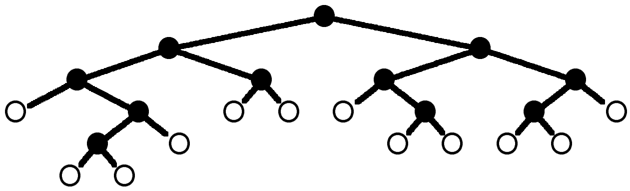
$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{M} \setminus \circ$, $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{M} \setminus \{\circ, \circ\bullet\circ\}$

$\mathcal{F} \to \mathcal{Q}_2 \bullet \mathcal{Q}_1 \;\cup$  $\cup$ 

Beispiel.  $\in \mathcal{F}$,  $\in \mathcal{F}$,

Lemma. $\mathcal{Q}_1 \bullet \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$

Satz. Wenn $X \in \mathcal{F} \bullet \mathcal{F}$, dann $X \twoheadrightarrow \infty$

Beispiel.  $\twoheadrightarrow \infty$

# Eine Klasse von Termen mit Normalform

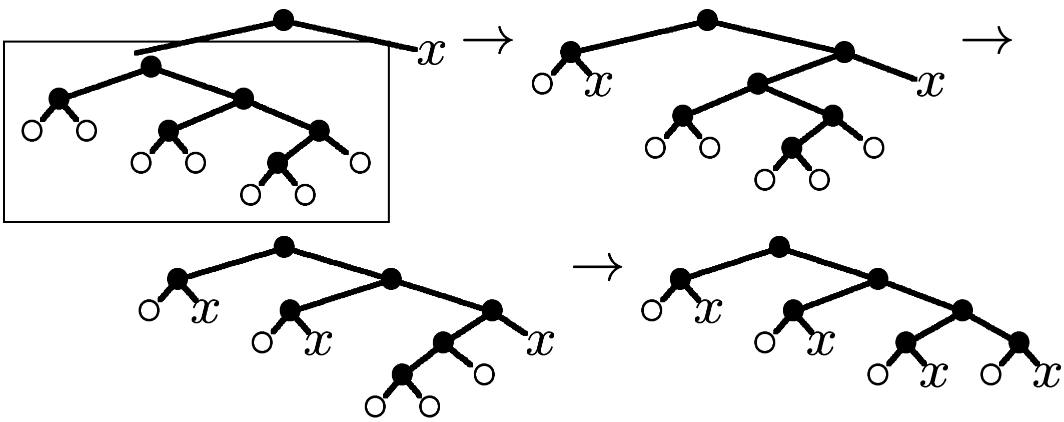
Bezeichnung: $aktiv\ \ passiv$

$\downarrow\left(\mathcal{N}_0\ x\right)$ und $\mathcal{N}_0\ x \not\hookrightarrow x\ *$

(keine Aktivierung)

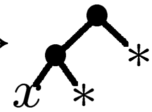
$\mathcal{N}_0 = \circ \ \cup \ \circ\ \mathcal{N} \ \cup \ \circ\ \circ\ \mathcal{N}_0$

Beispiel.

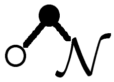
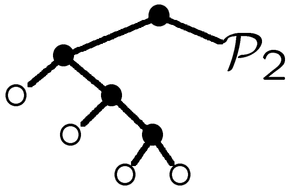
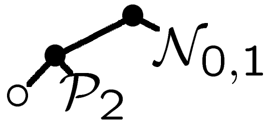


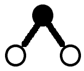

Satz. $\downarrow\left(\mathcal{N}_0\ \mathcal{N}\right)$

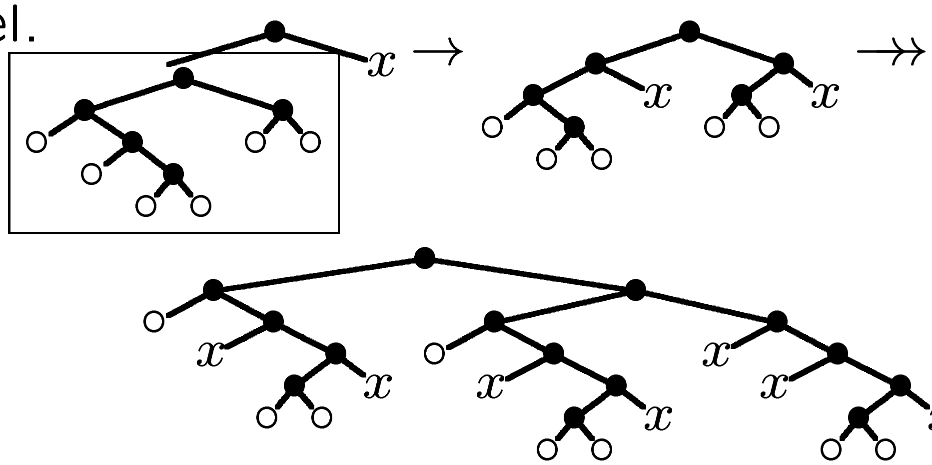
# Noch eine Klasse von Termen mit Normalform

$\downarrow\left(\mathcal{N}_{0,1}\,x\right)$ und $\mathcal{N}_{0,1}\,x \not\hookrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow$ 

(höchstens einmal aktivieren)

$\mathcal{N}_{0,1} = \circ \;\cup$  $\cup$  $\cup$ 

wobei $\mathcal{P}_2 = \{\circ,$  $\}$

Beispiel. 

Satz. $\downarrow\left(\mathcal{N}_{0,1}\,\mathcal{N}_0\right)$

Beweis. Es können Redexe $\mathcal{N}_0\,*$ auftreten, aber für die gilt der vorige Satz.

# Normalisierung

Terme ohne Normalform:
$\mathcal{F}^\frown\mathcal{F}$ und weitere rationale Mengen

Terme mit Normalform:
$\mathcal{N}_0{}^\frown\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_{0,1}{}^\frown\mathcal{N}_0$ und weitere

$\mathcal{M} = R_{divergent} \ \cup \ R_{normalisierend} \ \cup \ Rest$

# Resultat:

Es ist entscheidbar,
ob ein $\mathbf{S}$-Term eine Normalform hat.

# Resultat:

$\mathbf{CL(S)}$ hat keine Grund-Schleifen.

$\mathbf{CL(S)}$ ist top-terminierend.

# Offen: Wortproblem

# Verwandtes:

Wortproblem für $(\mathbf{L}\,x)\,y \to x\,(y\,y)$

(Statman 1989,
Sprenger und Wyman-Böni 1993)

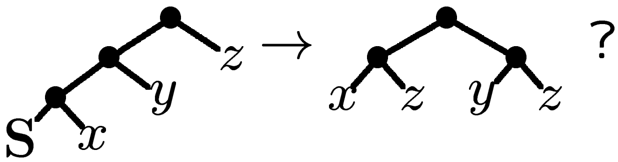
# TRS und rationale Sprachen

Menge aller Nachfolger (Vorgänger) von $\mathcal{L}$:

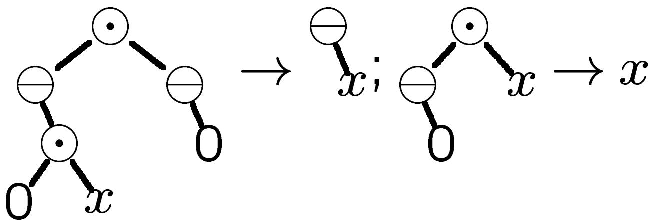
$\Delta_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{L}) = \{t' \mid \exists\, t \in \mathcal{L} : t \twoheadrightarrow t'\}$

Sei $\mathcal{L}$ rational. Wann $\Delta_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{L})$ auch?

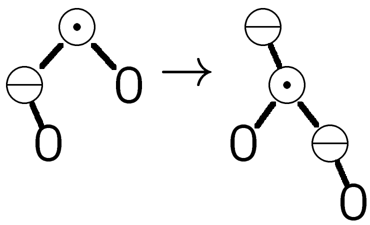
$\Delta_{\twoheadleftarrow}(\mathcal{N})$ für



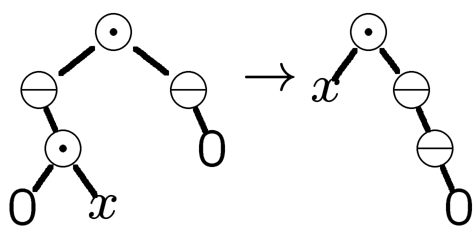
linear monadisch (Salomaa 1988)



grund (Dauchet und Tison 1990)



linear semi-monadisch (Coquide, Dauchet, Gilleron und Vagvölgyi 1991)



heute 18 Uhr

Gaststätte *Papiermühle*
Erfurter Straße

Endhaltestelle
Buslinie 16 (Mühltal)