Reguläre Relationen auf Bäumen

Johannes Waldmann
Institut für Informatik
Universität Leipzig

$R =$ Ersetzung (ein Schritt) durch TRS

$R^* =$ transitive Hülle $= \bigcup_{k \geq 0} R^k$

$L =$ Menge von Termen

suchen: $R^*(L) = \{y \mid \exists x \in L, (x, y) \in R^*\}$

$R^*(L) \cap N =$ von L erreichbare Normalformen

$(R^-)^*(N) =$ normalisierende Terme

L durch Baumautomat, R auch?

$$X \in T(F), Y \in T(G),\ \ X \cdot Y \in T(F \times G \cup \perp)$$

$$(X, Y) \in \mathsf{Pair}(A) :\iff X \cdot Y \in L(A).$$

$$R = \{(a^{m+1}b^{n+1}, a^m b^n)\}$$

$$R = \mathsf{Pair}\{P_1 \to \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{a}\, P_1, P_1 \to \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}\, P_2,$$

$$P_2 \to \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{b}\, P_2, P_2 \to \genfrac{}{}{0pt}{}{b\,b\,\epsilon}{\epsilon\perp\perp}\}$$

$$R^* = \{(a^{m+d}b^{n+d}, a^m b^n\}$$

$$\{(a^{m+1}b^{n+1}, a^m b^{n'})\}$$

$$\subset \mathsf{GTT}(\{P_1 \to \epsilon, P_1 \to bP_1, P_2 \to abP_1\},$$

$$\{P_2 \to \epsilon, P_2 \to bP_2\})$$

$$R = \mathsf{GTT}(A, B)$$

$$\forall C[,,] : (X_i, Y_i) \in R \;\Rightarrow\; (C[X_1,,], C[Y_1,,]) \in R$$

$$\mathsf{GTT}(p \to a, p \to b) \cup \mathsf{GTT}(q \to a, q \to c) \not\ni$$

$$(f(a,a), f(b,c))$$

Ground Tree Transducer

Dauchet, Tison, Heuillard, Lescanne, 1987

$X, Y \in T(F)$. $\quad (X, Y) \in \mathsf{GTT}(A, B) :\Longleftrightarrow$
$\exists C \in T(F \cup Q) : X \twoheadleftarrow_A C \twoheadrightarrow_B Y$ mit
$Q = \mathsf{state}(A) \cap \mathsf{state}(B)$.

function link (A_2, B_1, B_2)
$C_2 := A_2 \cup B_2$
für alle $q \in \mathsf{state}(B_1) \cap \mathsf{state}(B_2)$
    für alle $p \in \mathsf{state}(A_2)$
        if $L_p(A_2) \cap L_q(B_1) \neq \emptyset$ then
            $C := C \cup \{p \to q\}$
return C

$\mathsf{link}(A_2, B_1, B_2) = \mathsf{GTT}(B_1, B_2)(L(A_2))$

$\mathsf{GTT}(A_1, A_2) \circ \mathsf{GTT}(B_1, B_2) =$
    $\mathsf{GTT}(\mathsf{link}(B_1, A_2, A_2), \mathsf{link}(A_2, B_1, B_2))$

iterieren $\Rightarrow$ $\mathsf{GTT}(B_1, B_2)^*(L(A_2))$

Dual Ground Tree Transducer (DGTT)

$X_i \in T(F), A_i$ Automaten über $F \cup Q$

$(X_1, X_2) \in \mathsf{DGTT}(A_1, A_2) :\iff \exists C_i \in L(A_i), \sigma : Q \to T(F) : C_i\sigma = X_i$

TM $\subseteq$ Top rewriting $\subseteq$ DGTT

$$a_m a_{m-1} \cdots a_1 \quad H \quad b_1 b_2 \cdots b_n$$

$$H \quad \begin{array}{lll} (& a_1(a_2(\cdots)) & , \\ & b_1(b_2(\cdots)) &) \end{array}$$

Monadische DGTT: jedes $C_i \in L(A_i)$ hat genau ein $q \in Q$. Klasse MDGTT.

$$\begin{aligned} R &= \text{DGTT}(X, A_1, A_2) \\ R' &= \text{DGTT}(X', A_1', A_2') \\ (X, A_1, A_2) &= (\{x\}, \{g(x)\}, \{f(x, 0)\}) \\ (X', A_1', A_2') &= (\{y\}, \{f(1, y)\}, \{h(y)\}) \\ R \circ R' &= \{(g(1), y(0)\} \end{aligned}$$

function link (X, A_1, A_2, A_1')
$B :=$ $A_1 \cup A_1'$, start states from A_1
for each $x \in X$
    for each state q' of A_1'
        $H := A_1' \cup \{q' \to x\}$
        if $L(A_2) \cap L(H) \neq \emptyset$ then
            for each q in A_1 with $q \to_{A_1} x$
                $B := B \cup \{q \to q'\}$
return B

$\mathsf{MDGTT}(A_1, A_2)^{-}(L(A_1')) = \mathsf{link}(A_1, A_2, A_1')$

$\mathsf{MDGTT}(A_1, A_2) \circ \mathsf{MDGTT}(A_1', A_2') \subseteq$
$\mathsf{MDGTT}(\mathsf{link}(A_1, A_2, A_1'), \mathsf{link}(A_2', A_1', A_2))$

$L = L(A), R = \{l_1 \to r_1, \ldots\}$

$\{(q, l, r, \sigma) \mid q \twoheadrightarrow_A l\sigma, \sigma : V \to \mathsf{state}(A)\}$

GTT bauen: q vergessen:

$\{(A \cup \{t \to l\sigma\}, A \cup \{t \to r\sigma\})\}$

$R_1 = \{H(O(x)) \to I(H(x))\}$

$A_1 = \{z_0 \to H(z_1), z_1 \to O(z_1), z_1 \to \epsilon\}$

$$\begin{aligned} R'_1 = \mathsf{GTT}(&\{t \to H(O(z_1)), \ldots\}, \\ &\{t \to I(H(z_1)), \ldots\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'^{*}_1 = \mathsf{GTT}(&\{t \to H(O(z_1)), \ldots\}, \\ &\{t \to I(t), t \to I(H(z_1)), \ldots\}) \end{aligned}$$

$L = L(A), R = \{l_1 \to r_1, \ldots\}$

$\{(q, l, r, \sigma) \mid q \twoheadrightarrow_A l\sigma, \sigma : V \to \mathsf{state}(A)\}$

DGTT bauen: σ vergessen:

$\{((A \cup \{q \to l\}) \setminus A, (A \cup \{q \to r\}) \setminus A)\}$

$R_2 = \{O(H(O(x)) \to H(O(I(x)))\}$

$A_2 = \{z_0 \to O(z_0), z_0 \to H(z_1), z_1 \to O(z_2), z_2 \to \epsilon\}$

$$R_2' = \mathsf{DGTT}(\{z_0 \to O(z_0), z_0 \to O(H(O(\bullet)))\},\\ \{z_0 \to O(z_0), z_0 \to H(O(I(\bullet)))\})$$

$$R_2'^* = \mathsf{DGTT}(\{z_0 \to O(z_0), z_0 \to O(H(O(\bullet)))\},\\ \{\ldots, z_0 \to H(O(I(z_3)), z_3 \to I(z_3), z_3 \to \bullet\})$$

Für Wörter ist das dual zu GTT,
bringt also nichts neues.

Aber für Bäume.