Frank
Plumpton
Ramsey
22. 2. 1903
–
19. 1. 1930

On a Problem of Formal Logic

Proc. Lond. Math. Soc. (2) 30 (1930) 264–286

This paper is primarily concerned with a special case of one of the leading problems in mathematical logic, the problem of finding a regular procedure to determine the truth or falsity of any given logical formula (called in German the *Entscheidungsproblem*).

But in the course of this investigation it is necessary to use certain theorems on combinations which have an independent interest and are most conveniently set out by themselves beforehand.

Funktionssymbole simulieren

Formel F enthält $t = g(t_1, \ldots, t_n)$.
Ersetze durch

$$\begin{aligned} & \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! y \; G(x_1, \ldots, x_n, y) \\ \wedge \;\; & \exists y \; (G(t_1, \ldots, t_n, y) \wedge F[t/y]) \end{aligned}$$

Dabei

$$\exists! y \; Q(y) \;\; \equiv \;\; \exists y \; Q(y) \wedge \forall z \; (Q(z) \to z = y)$$

Keine endlichen Modelle

mehr als FO^2 (nämlich drei Variablen):

$$\begin{aligned} & \forall x \; \neg x < x \\ \wedge \;\; & \forall x \forall y \forall z \; (x < y \wedge y < z \to x < z) \\ \wedge \;\; & \forall x \exists y \; x < y \end{aligned}$$

mehr als $\forall^2 \exists^*$ (nämlich $\forall^3 \exists^*$):

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall z \exists u \quad & \neg x < x \\ \wedge \;\; & (x < y \wedge y < z \to x < z) \\ \wedge \;\; & x < u \end{aligned}$$

Nur Modelle der Größe 1

$$\forall x \forall y \; x = y \vee R(x) \wedge \neg R(y)$$

Keine Modelle größer als 2^{2n}

$$\begin{aligned} F_n \;\; = \;\; & \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \\ & (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n) \\ \to \quad & \;\; (R(x_1, x_2) \leftrightarrow R(x_2, x_1)) \\ & \wedge (R(x_1, x_3) \leftrightarrow R(x_3, x_1)) \\ & \ldots \\ & \wedge (R(x_{n-1}, x_n) \leftrightarrow R(x_n, x_{n-1})) \\ & \wedge (R(x_1, x_2) \vee R(x_1, x_3) \vee \ldots \vee R(x_{n-1}, x_n)) \\ & \wedge (\neg R(x_1, x_2) \vee \neg R(x_1, x_3) \vee \ldots \vee \neg R(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned}$$

Für $n = 4$: größtes Modell hat 17 Elemente

Ramsey–Sätze

Definition:

$$\binom{M}{r} \;\; := \;\; \{N \mid N \subseteq M \wedge |N| = r\}$$

Theorem A: Für beliebige Zahlen r, c gilt:

$$\begin{aligned} & \forall M : |M| \geq \omega \to \forall b : \binom{M}{r} \to \{1, \ldots, c\} \\ & \quad \exists N \subseteq M : |N| = \omega \wedge \left| b\left(\binom{N}{r}\right) \right| = 1 \end{aligned}$$

Theorem B: Für beliebige Zahlen r, n, c existiert eine Zahl m_0 mit

$$\begin{aligned} & \forall M : |M| \geq m_0 \to \forall b : \binom{M}{r} \to \{1, \ldots, c\} \\ & \quad \exists N \subseteq M : |N| = n \wedge \left| b\left(\binom{N}{r}\right) \right| = 1 \end{aligned}$$

Theorem C: Für beliebige Zahlen r, n, k mit $n + k \geq r$ existiert eine Zahl m_0 mit

$$
\begin{aligned}
&\forall M : |M| \geq m_0 \to \forall b : \binom{M}{r} \to \{1,2\} : \\
&\exists N \subseteq M, K \subseteq M : |N| = n \wedge |K| = k \wedge N \cap K = \emptyset \\
&\wedge \left| b\left(\left\{R \mid R \in \binom{N \cup K}{r}, R \cap N \neq \emptyset\right\}\right)\right| = 1
\end{aligned}
$$

Beweis für C: $m_0 \geq f(r, n, k)$ mit

$$
\begin{aligned}
f(1, n, k) &= \max(2n - 1, n + k) \\
f(r, 1, k) &= f(r - 1, k - r + 2, r - 2) + 1 \\
f(r, n, k) &= f(r, n - 1, g(r, n, k)) \\
g(r, 0, k) &= \max(r - 1, k) \\
g(r, n, k) &= f(r, 1, g(r, n - 1, k))
\end{aligned}
$$

Beweis für B: $m_0 \geq h(r, n, c)$ mit

$$
\begin{aligned}
h(r, n, 2) &= f(r, n - r + 1, r - 1) \\
h(r, n, c) &= h(r, h(r, n, c - 1), 2)
\end{aligned}
$$

Wachstum wie Ackermann:

$$
\begin{aligned}
A(0, y) = y + 1 \qquad & A(x + 1, 0) = A(x, 1) \\
A(x + 1, y + 1) \quad = \quad & A(x, A(x + 1, y))
\end{aligned}
$$

Alternative:

$$
\begin{aligned}
A = \quad & R(x_1) \wedge \neg R(x_2) \wedge R(x_3) \wedge \neg R(x_4) \\
\wedge \quad & x_1 \neq x_2 \wedge x_1 = x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \\
\wedge \quad & x_2 \neq x_3 \wedge x_2 = x_4 \wedge x_3 \neq x_4
\end{aligned}
$$

Gerüst:

$$B = \quad R(y_1) \wedge \neg R(y_2) \wedge y_1 \neq y_2$$

Alternative:

$$
\begin{aligned}
A' = \quad & \neg R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge R(x_3) \wedge R(x_4) \\
\wedge \quad & x_1 \neq x_2 \wedge x_2 = x_3 = x_4 \wedge \ldots
\end{aligned}
$$

Gerüst:

$$B' = \quad \neg R(y_1) \wedge R(y_2) \wedge y_1 \neq y_2$$

Reduzierte Formel:

$$
\begin{aligned}
P \;=\; & \forall y_1 \; N_1 \\
\wedge \; & \forall \{y_1, y_2\} \; N_2 \\
& \cdots \\
\wedge \; & \forall \{y_1, \ldots, y_n\} \; N_n
\end{aligned}
$$

Projektionen

$$
\begin{aligned}
& R(y_1, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_2, y_1) \wedge \neg R(y_2, y_2) \\
\vee \quad & \neg R(y_1, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_2, y_1) \wedge R(y_2, y_2)
\end{aligned}
$$

Projektion auf y_1 ergibt $R(y_1, y_1)$.

Projektion auf y_2 ergibt $\neg R(y_2, y_2)$,
Umbenennen ergibt $\neg R(y_1, y_1)$.

Erfüllbarkeit (kleines Universum)

Satz: F erfüllbar mit $u \leq n$ Elementen $\iff$
N_u enthält eine Alternative B,
und P enthält alle Projektionen $A < B$.

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3) \\
& \to \; (R(x_1, x_2) \leftrightarrow R(x_2, x_1)) \\
& \qquad \wedge (R(x_1, x_3) \leftrightarrow R(x_3, x_1)) \\
& \qquad \wedge (R(x_2, x_3) \leftrightarrow R(x_3, x_2)) \\
& \qquad \wedge (R(x_1, x_2) \vee R(x_1, x_3) \vee R(x_2, x_3)) \\
& \qquad \wedge (\neg R(x_1, x_2) \vee \neg R(x_1, x_3) \vee \neg R(x_2, x_3))
\end{aligned}
$$

Disjunktive Normalform:

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3$

$x_1 = x_2$	$x_1 = x_3$	$x_2 = x_3$	$R(x_1, x_1)$	$R(x_1, x_2)$	$R(x_1, x_3)$	$R(x_2, x_1)$	$R(x_2, x_2)$	$R(x_2, x_3)$	$R(x_3, x_1)$	$R(x_3, x_2)$	$R(x_3, x_3)$
0	0	0	*	0	*	0	*	1	!	1	*
0	0	0	*	1	*	1	*	0	!	0	*
0	0	0	*	*	0	!	*	1	0	1	*
0	0	0	*	*	1	!	*	0	1	0	*
0	0	0	*	0	1	0	*	*	1	!	*
0	0	0	*	1	0	1	*	*	0	!	*
1	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0	1	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0	0	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*

eine Alternative:

$$\begin{array}{rl} A = & x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \\ \wedge & \neg R(x_1,x_1) \wedge \neg R(x_1,x_2) \wedge \neg R(x_1,x_3) \\ \wedge & \neg R(x_2,x_1) \wedge \neg R(x_2,x_2) \wedge R(x_2,x_3) \\ \wedge & \neg R(x_3,x_1) \wedge R(x_3,x_2) \wedge \neg R(x_3,x_3) \end{array}$$

eine Projektion davon:

$$\begin{array}{rl} & y_1 \neq y_2 \\ \wedge & \neg R(y_1,y_1) \wedge R(y_1,y_2) \wedge R(y_2,y_1) \wedge \neg R(y_2,y_2) \end{array}$$

ein Modell:

$$R = \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

verschiedene Argumente

$$\begin{aligned} R(x,y,z) &= R^3(x,y,z), \\ R(x,x,z) &= R^2_{12}(x,z), \\ R(x,y,y) &= R^2_{23}(x,y), \\ R(x,y,x) &= R^2_{13}(x,y), \\ R(x,x,x) &= R^1_{123}(x) \end{aligned}$$

Lineare Formen

$R(y_{s_1},\ldots,y_{s_r})$ (mit paarw. verschied. s_i)

wähle $\sigma : \{1,\ldots,r\} \to \{1,\ldots,r\}$,
so daß $s_{\sigma(1)} < s_{\sigma(2)} < \ldots < s_{\sigma(r)}$,

vergleiche mit $R(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(r)})$.

$$\begin{array}{rl} & R(y_1,y_2) \wedge \neg R(y_2,y_1) \wedge R(y_1,y_3) \\ \wedge & \neg R(y_3,y_1) \wedge R(y_2,y_3) \wedge \neg R(y_3,y_2) \\ \wedge & Q(y_1) \wedge \neg Q(y_2) \wedge Q(y_3) \end{array}$$

linear in R, nicht linear in Q.

Erfüllbarkeit (großes Universum)

Theorem: zu jedem F existiert m_0,
so daß für alle $u \geq m_0$:

F erfüllbar mit u Elementen $\iff$
N_n enthält eine *lineare* Alternative B,
und alle ihre Projektionen $A < B$.

Beweis: $U = \{1 < 2 < \ldots < m_0\}$.
Konstruiere $U = U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_{n-1} (\supset U_n)$:

$$\begin{array}{l} \forall \{y_{\sigma(1)} < \ldots < y_{\sigma(r)}\} \subset U_{\leq r} : \\ \quad R(y_1,\ldots,y_r) \leftrightarrow R(\sigma(1),\ldots,\sigma(r)) \end{array}$$

benutze Färbung: $\binom{U_{r-1}}{r} \to 2^{r! a_r}$

ergibt Schranke $m_0 \geq 2^{a_1} k_1$ mit

$$\begin{aligned} k_{n-1} &= n \\ k_{r-1} &= \text{wenn } a_r = 0 \text{ dann } k_r \text{ sonst } h(r, k_r, 2^{r! a_r}) \end{aligned}$$

Anwendung: ein zweistelliges Symbol

$R(x,y) \;=\;$ wenn $x = y$ dann $E(x)$ sonst $Z(x,y)$.

$(i)\quad E(y_1) \wedge \ldots E(y_n) \qquad (ii)\quad \neg E(y_1) \wedge \ldots \neg E(y_n)$

$$\begin{array}{ll} (a) & \bigwedge_{i<k} Z(y_i,y_k) \wedge Z(y_k,y_i) \\ (b) & \bigwedge_{i<k} Z(y_i,y_k) \wedge \neg Z(y_k,y_i) \\ (c) & \bigwedge_{i<k} \neg Z(y_i,y_k) \wedge Z(y_k,y_i) \\ (d) & \bigwedge_{i<k} \neg Z(y_i,y_k) \wedge \neg Z(y_k,y_i) \end{array}$$

	(a)	(b)	(c)	(d)
(i)	(1)	(6)	(6)	(3)
(ii)	(4)	(5)	(5)	(2)

(1) $R(x,y) =$ True (2) $R(x,y) =$ False
(3) $R(x,y) = (x = y)$ (4) $R(x,y) = (x \neq y)$
(5) der strikte Teil $<$ einer linearen Ordnung $\leq$
(6) eine lineare Ordnung $\leq$

D. H. Mellor (in: The eponymous F. P. Ramsey, J. Graph Theory 7 (1) (1983), 9–13)

Ramsey's enduring fame in mathematics . . .
rests on a theorem he didn't need,
proved in the course of trying to do
something we now know can't be done!

---

http://www.informatik.uni-leipzig.de/~joe/edu/ss00/kombinat/