Wozu brauchte F. P. Ramsey den Satz von F. P. Ramsey?

Johannes Waldmann, Leipzig

30. Mai 2000

Zusammenfassung

Die Ramsey–Theorie untersucht Aussagen der Form: jede beliebige Färbung einer genügend großen Struktur enthält beliebig große einfarbige Teilstrukturen. In dieser Allgemeinheit sieht man die Dinge jedoch erst seit ca. 30 Jahren (in Arbeiten von Erdös, Graham, Rothschild, Spencer). Der Theorie zugrunde liegt ein Satz von F. P. Ramsey von ca. 1930. Ich erläutere weniger dessen Beweis als vielmehr seinen ursprünglichen Zweck: er liefert ein Entscheidungsverfahren für einen Teil der Prädikatenlogik erster Stufe (nämlich All–Formeln mit Identität).

Frank Plumpton Ramsey
22. 2. 1903
–
19. 1. 1930

On a Problem of Formal Logic

Proc. Lond. Math. Soc. (2) 30 (1930) 264–286

This paper is primarily concerned with a special case of one of the leading problems in mathematical logic, the problem of finding a regular procedure to determine the truth or falsity of any given logical formula (called in German the *Entscheidungsproblem*).

But in the course of this investigation it is necessary to use certain theorems on combinations which have an independent interest and are most conveniently set out by themselves beforehand.

Teil I

Umfeld

1 Prädikatenlogik, Entscheidungsproblem

(Definitionen wie in der Grundvorlesung) Wir haben prädikatenlogische Formeln (erster Stufe, ohne Sorten), bestehend aus Relations– und Funktionssymbolen, Quantoren, logischen Funktoren.

Das Erfüllbarkeitsproblem (historische Bezeichnung: Entscheidungsproblem) ist dieses: gegeben: eine Formel F gefragt: hat die Formel F ein Modell S. Wir betrachten auch diese Verfeinerung: gegeben: Formel F und Zahl n, gefragt: hat F ein Modell (mit einem Universum) der Größe n.

2 Funktionssymbole

Wir bemerken, daß wir auf Funktionssymbole verzichten können: Falls in der Formel F der Term $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ vorkommt, betrachten wir stattdessen die Formel

$$\begin{array}{ll} & \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! y \; G(x_1, \ldots, x_n, y) \\ \wedge & \exists y \; (G(t_1, \ldots, t_n, y) \wedge F[t/y]) \end{array}$$

wobei $x_1, \ldots, x_n, y$ neue Variablennamen sind und G ein neues Relationssymbol. Das heißt: wir ersetzen das n–stellige Funktionssymbol g durch das $(n+1)$–stellige Relationssymbol G, und fordern, daß die Interpretation von G nacheindeutig ist. Dazu brauchen wir den Quantor $\exists! y$ (es existiert genau ein y), den wir so schreiben können: Beachte, daß wir dazu die Identität $(=)$ benötigen.

$$\exists! y \; Q(y) \quad \equiv \quad \exists y \; Q(y) \wedge \forall z \; (Q(z) \rightarrow z = y)$$

Wir betrachten ab jetzt nur noch Formeln ohne Funktions– (und Konstanten–)symbole.

3 Einstellige Relationen

Die Erfüllbarkeit einer Formel, in der alle Relationssymbole einstellig sind, ist entscheidbar (Behmann 1922).

Die Formel F enthalte die Relationssymbole $\{R_1, \ldots, R_r\}$. Es gibt für jedes Element x des Universums 2^r Möglichkeiten für die Folge $R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)$ der Wahrheitswerte der Relationssymbole.

Das gibt eine Klassenteilung des Universums (jede Klasse sammelt alle x, die sich nicht in den Werten der Relationssymbole unterscheiden). Die Klassen sind disjunkt, und manche können leer sein.

Die Formel F kann feststellen, ob eine Klasse leer ist oder nicht, aber sie kann für nichtleere Klassen *nicht* feststellen, *wieviele* Elemente darin sind. Um die Erfüllbarkeit von F zu testen, können wir alle Varianten durchprobieren (jede von 2^r Klassen leer oder nicht leer: insgesamt 2^{2^r} Varianten).

4 Zwei Variablen

Eine andere Klasse mit entscheidbarer Erfüllbarkeit sind die Formeln FO^2 mit nur zwei gebundenen Variablen (Bernays, Schönfinkel, 1928). Das liegt wiederum daran, daß solche Formeln, falls sie überhaupt Modelle haben, bereits endliche Modelle besitzen.

Anstatt eines Beweises (siehe dazu die kommende Vorlesung über Komplexität und endliche Modelle, Prof. Herre, WS 00/01) eine Veranschaulichung: die typische Formel, die zwar erfüllbar ist, aber *nicht* endlich erfüllbar, verlangt eine Halbordung ohne maximales Element. Das können wir so hinschreiben:

$$\begin{array}{ll} & \forall x \, \neg x < x \\ \wedge & \forall x \forall y \forall z \, (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \\ \wedge & \forall x \exists y \; x < y \end{array}$$

Wir sehen, daß wir (für die Transititvität) *drei* Variablen benutzt haben.

5 Formel der Form $\forall^2\exists^*$

Eine pränexe Normalform ist eine Formel $F = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n M$, wobei die $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und M keine Quantoren enthält. Wir nennen M *Matrix* von F und die Folge $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ *Präfix*.

Es läßt sich nun ganz ähnlich wie für FO^2 zeigen, daß pränexe Formeln mit Präfix $\forall^2\exists^*$ (d. h. erst zwei $\forall$, dann beliebig viele $\exists$) (und ohne Benutzung der Identität) ebenfalls die endliche Modelleigenschaft haben, und damit entscheidbares Erfüllbarkeitsproblem.

Auch hierzu statt eines Beweise ein Verdeutlichung der Notwendigkeit:

$$\begin{array}{lll} \forall x \forall y \forall z \exists u & & \neg x < x \\ & \wedge & (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \\ & \wedge & x < u \end{array}$$

Das ist eine Umformung des vorigen Beispiels, der Präfix ist $\forall^3\exists$.

6 Formeln mit Präfix $\forall^*$

Wir betrachten All–Formeln (die pränexe Normalform enthält *keinen* $\exists$–Quantor). Beliebige Relationssymbole sind erlaubt. Man stellt leicht fest, daß die Erfüllbarkeit einer solchen Formel nicht von der Größe des Universums abhängt:

Einerseits sind nämlich solche Formeln abwärtsstabil: haben wir ein Modell, dann ist auch jede Teilmenge des Universums (mit den ensprechend eingeschränkten Interpretationen der Symbole) ein Modell.

Andererseits können wir auch aus jedem Modell ein größeres basteln: Wir "vervielfachen" einfach irgendein fest gewähltes Element des Universums.

Daraus folgt, daß wir die Erfüllbarkeit überhaupt bereits in einem Universum der Größe 1 feststellen können, und dazu müssen wir nur endlich viele Dinge durchprobieren.

7 Formeln mit Präfix $\forall^*$ und Identität

Der zweite Teil des genannten Tricks schlägt fehl, wenn die Formel auch das Symbol = (für Identität) benutzen darf, denn dann kann sie feststellen, daß wir "unzulässigerweise" ein Element vervielfacht haben.

Beispielsweise hat

$$\forall x \forall y \; x = y \vee R(x) \wedge \neg R(y)$$

ein Modell der Größe 1, aber kein größeres.

Der eingangs erwähnte historische Aufsatz von F. P. Ramsey zeigt nun, daß für jede solche Formel F eine Zahl m_0 existiert, so daß F Universen der Größe $m \geq m_0$ (bezüglich Erfüllbarkeit) nicht mehr voneinander unterscheiden kann. (Im Beispiel wäre $m_0 = 2$.) Das Ergebnis läßt sich ausweiten auf Formeln mit Präfix $\exists^*\forall^*$.

Größeres Beispiel: Die Formel

$$\begin{aligned}
F_n \;=\; & \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \\
& (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n) \\
\rightarrow \quad & (R(x_1, x_2) \leftrightarrow R(x_2, x_1)) \\
& \wedge (R(x_1, x_3) \leftrightarrow R(x_3, x_1)) \\
& \ldots \\
& \wedge (R(x_{n-1}, x_n) \leftrightarrow R(x_n, x_{n-1})) \\
& \wedge (R(x_1, x_2) \vee R(x_1, x_3) \vee \ldots \vee R(x_{n-1}, x_n)) \\
& \wedge (\neg R(x_1, x_2) \vee \neg R(x_1, x_3) \vee \ldots \vee \neg R(x_{n-1}, x_n))
\end{aligned}$$

hat Modelle der Größe $2^{n/2}$, aber keine mit mehr als 2^{2n} Elementen.

Teil II

Struktursatz

Der Ausdruck $\binom{M}{k}$ bezeichnet die Menge aller r–elementigen Teilmengen von M.

$$\binom{M}{r} \quad := \quad \{N \mid N \subseteq M \wedge |N| = r\}$$

Das "ursprünglichste" Theorem von Ramsey ist:

Theorem A: Für beliebige Zahlen r, c gilt:

$$\begin{aligned} &\forall M : |M| \geq \omega \rightarrow \forall b : \binom{M}{r} \rightarrow \{1, \ldots, c\} \\ &\quad \exists N \subseteq M : |N| = \omega \wedge \left| b\left(\binom{N}{r}\right)\right| = 1 \end{aligned}$$

Er beweist das zunächst für $c = 2$ durch Induktion nach r. Dabei benutzt er sinngemäß das Lemma von König: in einem unendlichen Baum mit endlichen Knotengraden gibt es einen unendlichen Pfad. Schließlich benutzt man Induktion nach c.

Der für die logischen Untersuchungen tatsächlich anzuwendende Satz ist eine endliche Variante von A, nämlich

Theorem B: Für beliebige Zahlen r, n, c existiert eine Zahl m_0 mit

$$\begin{aligned} &\forall M : |M| \geq m_0 \rightarrow \forall b : \binom{M}{r} \rightarrow \{1, \ldots, c\} \\ &\quad \exists N \subseteq M : |N| = n \wedge \left| b\left(\binom{N}{r}\right)\right| = 1 \end{aligned}$$

Das könnte man nun einfach durch einen Kompaktheitsschluß aus A herstellen. Ramsey möchte aber explizit sichtbare Schranken für m_0, und liefert einen Beweis, bei diese konstruiert werden.

Tatsächlich beweist er nicht B, sondern

Theorem C: Für beliebige Zahlen r, n, k mit $n + k \geq r$ existiert eine Zahl m_0 mit

$$\begin{aligned} &\forall M : |M| \geq m_0 \rightarrow \forall b : \binom{M}{r} \rightarrow \{1, 2\} : \\ &\exists N \subseteq M, K \subseteq M : |N| = n \wedge |K| = k \wedge N \cap K = \emptyset \\ &\wedge \left| b\left(\left\{R \mid R \in \binom{N \cup K}{r}, R \cap N \neq \emptyset\right\}\right)\right| = 1 \end{aligned}$$

Nun ist B für $c = 2$ äquivalent zu C, denn einerseits $C(r, n, k) \rightarrow B(r, n, 2)$ und andererseits $B(r, n + k, 2) \rightarrow C(r, n, k)$.

Zum Beweis von C gibt Ramsey eine explizite Schranke $m_0 = f(r, n, k)$.

$$\begin{aligned} f(1, n, k) &= \max(2n - 1, n + k) \\ f(r, 1, k) &= f(r - 1, k - r + 2, r - 2) + 1 \\ f(r, n, k) &= f(r, n - 1, g(r, n, k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(r, 0, k) &= \max(r - 1, k) \\ g(r, n, k) &= f(r, 1, g(r, n - 1, k)) \end{aligned}$$

Nach erfolgtem Beweis von C gilt damit B für $c = 2$. Daraufhin veranstalten wir eine Induktion nach c und erhalten die Wahrheit von B überhaupt. Das liefert wiederum eine explizite Schranke $h(r, n, c)$ für m_0 in B:

$$\begin{aligned} h(r, n, 2) &= f(r, n - r + 1, r - 1) \\ h(r, n, c) &= h(r, h(r, n, c - 1), 2) \end{aligned}$$

Die genau Struktur dieser Formeln interessiert hier gar nicht (um das zu verstehen, müßte man den Beweis verfolgen). Was wichtig ist: die Schranke h wächst wie eine Ackermann–Funktion, also nicht primitiv rekursiv.

$$\begin{aligned} &A(0, y) = y + 1 \qquad A(x + 1, 0) = A(x, 1) \\ &A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

Teil III

Transformation

Das Ziel dieses Teils ist, eine All–Formel mit Identität so äquivalent umzuschreiben, daß wir in genügend großen Universen den Satz über die Existenz großer einfarbiger Teilstrukturen anwenden können.

8 Disjunktive Normalform

Wir haben $F = \forall x_1 \ldots \forall x_n M$ mit quantorenfreier Matrix M. Die *Atome* von M sind Formeln $R_?(x_?, \ldots, x_?)$ und $x_? = x_?$. (Aus diesen entsteht M durch boolesche Verknüpfungen.)

Wir stellen zu M eine kanonische disjunktive Normalform N her, in folgendem Sinne: die Menge aller Atome ist $\{A_1, \ldots, A_a\}$. Es gibt eine zu M äquivalente Disjunktion von Konjuktionen, bei der jede Konjunktion aus negierten oder nicht negierten Atomen besteht. Wir verlangen, daß in *jeder* Konjunktion *alle* Atome erscheinen sollen. (Es gibt 2^a solcher Konjunktionen.)

Beispielsweise (4 Variablen, nur ein einstelliges Symbol) sieht eine Alternative so aus:

$$\begin{aligned} A = & \quad R(x_1) \wedge \neg R(x_2) \wedge R(x_3) \wedge \neg R(x_4) \\ & \wedge \quad x_1 \neq x_2 \wedge x_1 = x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \\ & \wedge \quad x_2 \neq x_3 \wedge x_2 = x_4 \wedge x_3 \neq x_4 \end{aligned}$$

Jede der eben hergestellten Konjunktionen enthält für alle $1 \leq i < j \leq n$ die Aussagen $x_i = x_j$ oder $x_i \neq x_j$. Wegen der Transitivität von $=$ können wir feststellen, welche dieser Kombinationen überhaupt konstistent sind. Jede Konjunktion mit inkonsistenter Verknüpfung von Gleich– und Ungleichheiten streichen wir aus der disjunktiven Normalform, denn sie hat keinen Einfluß auf die Erfüllbarkeit der gesamten Formel.

Wir löschen ebenfalls Alternativen, die nicht erfüllbar sind, weil sie solche Konjunktionen enthalten:

$$R(x_1) \wedge \neg R(x_2) \wedge x_1 = x_2$$

9 Ähnlichkeit von Alternativen

Jede der restlichen Alternativen schreiben wir mit neuen Variablennamen, und zwar so, daß verschiedene Variablen auch verschiedene Werte bezeichnen. Aus obiger Alternative A ergibt sich mit $y_1 := x_1 = x_3, y_2 := x_2 = x_4$

$$B = \quad R(y_1) \wedge \neg R(y_2) \wedge y_1 \neq y_2$$

wobei bereits überflüssige Bestandteile gekürzt wurden.

Wenn aus einer x–Alternative A auf diese Weise die y–Alternative B entsteht, nennen wir B das Gerüst von A. Zwei y–Alternativen heißen *ähnlich*, wenn sie durch Permutation der Variablen $y_?$ ineinander übergehen. Zwei x–Alternativen heißen *ähnlich*, wenn ihre Gerüste ähnlich sind.

Weitere Beispiele: Die x–Alternative

$$\begin{aligned} A' = \quad & \neg R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge R(x_3) \wedge R(x_4) \\ \wedge \quad & x_1 \neq x_2 \wedge x_2 = x_3 = x_4 \wedge \ldots \end{aligned}$$

hat das y–Gerüst

$$B' = \quad \neg R(y_1) \wedge R(y_2) \wedge y_1 \neq y_2$$

und B' ist ähnlich zu B (durch Vertauschen von y_1 und y_2), also ist auch A' ähnlich zu A (obwohl A' nicht durch eine Permutation aus A entsteht!)

Wir nennen eine bezüglich Ähnlichkeit abgeschlossene Menge eine *Form*.

Wenn wir ein Modell für F festhalten, dann können wir beliebig $(y_1, \ldots, y_n)$ wählen. Jeder Belegung der $y_?$ macht dann *genau eine* der Alternativen wahr (weil M eine *kanonische* Normalform ist).

Insbesondere machen *alle* Permutationen der einmal gewählten $y_?$ jeweils eine Alternative einer komplette Ähnlichkeitsklasse (einer Form) wahr. Daraus folgt, daß Formen immer komplett in der kanonischen disjunktiven Normalform vorkommen müssen (denn die Alternativen, die nicht vorkommen, sind falsch). Deswegen dürfen wir (unter Beibehaltung der Erfüllbarkeit der Formel) alle die Alternativen löschen, deren Form *nicht* komplett in der Formel erscheint.

Wir können nun die Formen danach einteilen, wieviele verschiedene Variablen sie enthalten, und deswegen $F \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n N$ äquivalent umschreiben als

$$\begin{aligned} P \;=\; & \forall y_1 \; N_1 \\ \wedge \;\; & \forall \{y_1, y_2\} \; N_2 \\ & \ldots \\ \wedge \;\; & \forall \{y_1, \ldots, y_n\} \; N_n \end{aligned}$$

wobei die N_k Disjunktionen von Formen sind. Hier bedeutet $\forall\{y_1, \ldots, y_k\}$: “für alle paarweise verschiedenen $y_1, \ldots, y_k$”.

10 Projektionen

Aus einer Form B in irgendeinem N_k in P erhalten wir Projektionen auf Formen C in N_l für $l < k$:

Wir wählen eine Alternative A aus B und eine Teilmenge $Y = \{y_{s_1}, \dots, y_{s_l}\}$ der Variablen $\{y_1, \dots, y_k\}$ und streichen in A alle Konjunktionsglieder, die wenigstens eine *nicht* ausgewählte Variable enthalten. Im Rest benennen wir die Variablen um nach $y_{s_i} \mapsto y_i$, und erhalten so die Konjunktion A'. Wir nennen die Form B', die die Ähnlichkeitsklasse von A' ist, eine *Projektion* von B, und schreiben $B > A$.

Beispiel: wenn wir in der Form

$$
\begin{aligned}
& R(y_1, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_2, y_1) \wedge \neg R(y_2, y_2) \\
\vee \quad & \neg R(y_1, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_2, y_1) \wedge R(y_2, y_2)
\end{aligned}
$$

einmal in der ersten Alternative y_1 auswählen, erhalten wir die Projektion $R(y_1, y_1)$, wählen wir y_2, erhalten wir (nach Umbennenen!) die Projektion $\neg R(y_1, y_1)$.

11 Erfüllbarkeit in kleinen Universen

Hat das Universum die Größe $u \leq n$, dann können wir die Erfüllbarkeit direkt aus P ablesen: F ist genau dann erfüllbar, wenn in der Zeile N_u von P eine Form A steht, deren sämtliche Projektionen (auf kleinere Variablenmengen) ebenfalls in P vorkommen.

Beweis: hat F ein Modell mit $u \leq n$ Elementen, dann muß es eine der Formen B in N_u erfüllen (d. h. jede Alternative der Form bei einer anderen Belegung).

Einer Projektion $A < B$ entspricht eine Auswahl von einigen der $y_?$. Für jede solche Auswahl finden wir eine Alternative der Projektion, die erfüllt wird.

Andererseits: Es gibt $B \in N_u$ gibt, dessen Projektionen auch alle in P liegen. Dann bauen wir ein Modell aus einem Universum mit den Elementen $e_1, \dots, e_u$: Wir wählen irgendeine Alternative B aus N_u und belegen die Relationssymbole so, daß B erfüllt ist. Dann ist bei jeder Permutation der $e_?$ eine zu B ähnliche Alternative erfüllt, und von jeder Projektion ist eine Alternative erfüllt.

12 Beispiel

Aus der eingangs erwähnten Familie nehmen wir F_3. (Durch explizites Ausrechnen sieht man: Sie hat Modelle bis zur Größe 5.)

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3) \\
& \quad \to \quad (R(x_1, x_2) \leftrightarrow R(x_2, x_1)) \\
& \qquad\quad \wedge (R(x_1, x_3) \leftrightarrow R(x_3, x_1)) \\
& \qquad\quad \wedge (R(x_2, x_3) \leftrightarrow R(x_3, x_2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\wedge(R(x_1,x_2) \vee R(x_1,x_3) \vee R(x_2,x_3))\\
&\wedge(\neg R(x_1,x_2) \vee \neg R(x_1,x_3) \vee \neg R(x_2,x_3))
\end{aligned}
$$

hat kanonische disjunktive Normalform

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3$

$x_1 = x_2$	$x_1 = x_3$	$x_2 = x_3$	$R(x_1,x_1)$	$R(x_1,x_2)$	$R(x_1,x_3)$	$R(x_2,x_1)$	$R(x_2,x_2)$	$R(x_2,x_3)$	$R(x_3,x_1)$	$R(x_3,x_2)$	$R(x_3,x_3)$
0	0	0	$*$	0	$*$	0	$*$	1	!	1	$*$
0	0	0	$*$	1	$*$	1	$*$	0	!	0	$*$
0	0	0	$*$	$*$	0	!	$*$	1	0	1	$*$
0	0	0	$*$	$*$	1	!	$*$	0	1	0	$*$
0	0	0	$*$	0	1	0	$*$	$*$	1	!	$*$
0	0	0	$*$	1	0	1	$*$	$*$	0	!	$*$
1	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
0	1	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
0	0	1	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
1	1	1	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

Eine (die erste) Alternative davon ist

$$
\begin{aligned}
A \;=\; & \quad x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3\\
& \wedge \quad \neg R(x_1,x_1) \wedge \neg R(x_1,x_2) \wedge \neg R(x_1,x_3)\\
& \wedge \quad \neg R(x_2,x_1) \wedge \neg R(x_2,x_2) \wedge R(x_2,x_3)\\
& \wedge \quad \neg R(x_3,x_1) \wedge R(x_3,x_2) \wedge \neg R(x_3,x_3)
\end{aligned}
$$

Das Gerüst dieser Alternative hat genau die gleiche Form (mit $x_?$ durch $y_?$ ersetzt). Ähnlich zu dieser Alternative sind alle, die durch Vertauschen der Variablen entstehen, und diese sind auch alle in der KNF enthalten.
Die Projektion auf die Variablen y_2, y_3 ist (nach Umbenennung auf y_1, y_2)

$$
\begin{aligned}
& \quad y_1 \neq y_2\\
\wedge & \quad \neg R(y_1,y_1) \wedge R(y_1,y_2) \wedge R(y_2,y_1) \wedge \neg R(y_2,y_2)
\end{aligned}
$$

Sie ist enthalten in den Gerüsten, die zu der vorletzten Zeile gehören.
Wir können deswegen ein Modell der Größe 3 basteln, indem wir A für e_1, e_2, e_3 erfüllen:

$$
R \;=\; \begin{array}{c|ccc}
 & e_1 & e_2 & e_3\\
e_1 & 0 & 0 & 0\\
e_2 & 0 & 0 & 1\\
e_3 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

13 Größere Universen

Wenn es *keine* Form A gibt, deren sämtliche Projektionen in P liegen, dann ist die Formel auch für größere Universen nicht erfüllbar.

Der Schluß in die andere Richtung gelingt jedoch nicht so direkt (Beispiel!) und wir brauchen einen neuen Begriff.

Wir verschärfen dazu die Forderung "N_u enthält eine Alternative mit allen ihren Projektionen", und zwar so: "N_n enthält eine *lineare* Alternative mit allen Projektionen". Den Begriff "linear" definieren wir passend.

Dabei wird aus der zunächst *notwendigen* Bedingung für die Erfüllbarkeit nun eine nur *hinreichende* wird (weil nicht alle Alternativen linear sind). Wenn allerdings das Universum groß genug ist, dann wird auch diese Bedingung wieder notwendig.

14 Paarweise verschiedene Argumente

Wir möchten zunächst erreichen, daß alle Relationssymbole auf paarweise verschiedene Argumente angewandt werden. Das läßt sich machen, in dem wir neue Symbole erfinden. Beispiel: Zur dreistelligen Relation R erfinden wir neue Symbole $R^3, R^2_{12}, R^2_{23}, R^2_{13}, R^1_{123}$ mit der Bedeutung

$$
\begin{aligned}
R(x,y,z) &= R^3(x,y,z),\\
R(x,x,z) &= R^2_{12}(x,z),\\
R(x,y,y) &= R^2_{23}(x,y),\\
R(x,y,x) &= R^2_{13}(x,y),\\
R(x,x,x) &= R^1_{123}(x)
\end{aligned}
$$

Dann ist eine beliebige Interpretation der dreistelligen Relation R darstellbar als "disjunkte Summe" von Interpretationen für die Relationen $R^3, R^2_{12}, R^2_{23}, R^2_{13}, R^1_{123}$, die nur für paarweise verschiedene Argumente definiert erklärt sind.

Wir betrachten ab jetzt nur noch Interpretationen für paarweise verschiedene Argumente.

15 Lineare Formen

Wenn R ein r–stelliges Relationssymbol ist, dann kann es auf

$$n(n-1)\dots(n-r+1)$$

verschiedene Weisen Argumente bekommen (n war die Anzahl der gebundenen Variablen). Da wir von kanonischen disjunktiven Normalformen sprechen, ist jede Alternative eine Konjunktion, in der wirklich für jedes Relationssymbol *alle* diese Möglichkeiten (negiert oder nicht) vorkommen.

Die Alternative heißt *linear in R*, wenn dabei folgendes gilt:

Für jedes Vorkommen von $R(y_{s_1}, \dots, y_{s_r})$ (mit paarweise verschiedenen s_i) gilt: Wenn $\sigma : \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, r\}$ diejenige Permutation ist, für die $s_{\sigma(1)} < s_{\sigma(2)} < \dots < s_{\sigma(r)}$, dann stimmt das Vorzeichen (also negiert oder nicht) dieses Vorkommens überein mit dem Vorzeichen von $R(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(r)})$.

Die Alternative heißt *linear*, wenn sie in allen vorkommenden Relationssymbolen linear ist.

Beispiel: Die Alternative

$$\begin{array}{ll} & R(y_1, y_2) \wedge \neg R(y_2, y_1) \wedge R(y_1, y_3) \\ \wedge & \neg R(y_3, y_1) \wedge R(y_2, y_3) \wedge \neg R(y_3, y_2) \\ \wedge & Q(y_1) \wedge \neg Q(y_2) \wedge Q(y_3) \end{array}$$

ist linear in R, denn für $s_1 < s_2$ haben wir immer $R(y_{s_1}, y_{s_2}) \wedge \neg R(y_{s_2}, y_{s_1})$; aber nicht linear in Q, denn Q kommt sowohl negiert als nicht negiert vor. Also ist die gesamte Alternative nicht linear.

16 Konstruktion linearer Formen

Theorem: Für jede Formel F der betrachteten Art gibt es eine Zahl m_0, so daß für alle $m \geq m_0$ gilt: F hat ein Modell der Größe $M \iff P$ enthält eine lineare Alternative, deren sämtliche Projektionen in P vorkommen.

(Beachte, daß alle Projektionen einer linearen Alternative wieder linear sind.)

Die Richtung $\Leftarrow$ sieht man direkt ein (Wir nehmen ein Universum mit den Elementen $\{1 < 2 < \dots < u\}$ und bestimmen das Vorzeichen von $R(y_1, \dots, y_r)$ gemäß der passenden Permutation $R(\sigma(1), \dots, \sigma(r))$ und für $\Rightarrow$ verwenden wir Theorem B. Unterwegs konstruieren wir eine explizite Schranke für m_0.

Beachte in unserem Beispiel F_3, daß A *nicht* linear im Symbol R ist: wir haben $\neg R(x_1, x_2)$, aber $R(x_2, x_3)$. In der Tat gibt es hier *überhaupt keine* lineare Alternative (und deswegen hat die Formel keine beliebig großen Modelle).

Wir zeigen jetzt im wesentlichen: wenn P in einem genügend großen Universum erfüllt ist, dann gibt es eine Auswahl $\{y_1, \dots, y_n\}$, für die die wahre Alternative in P eine lineare ist.

Nehmen wir an, wir haben a_1 Relationssymbole, die einstellig sind, a_2 zweistellige, und so weiter.

Das Universum U ist linear geordnet $\{1 < 2 < \ldots < N\}$.

Wir können die Elemente des Universums $U = U_0$ in 2^{a_1} Klassen teilen, jenachdem, welche der einstelligen Prädikate für sie wahr sind. Haben wir wenigstens $2^{a_1}k_1$ Elemente im Universum (für eine später zu bestimmende Zahl k_1), dann enthält eine dieser Klassen wenigstens k_1 Elemente. Nennen wir diese $U_1 \subset U_0$.

Betrachten wir nun die zweistelligen Prädikate, und dazu die Menge $\{(x, y) \mid x, y \in U_1, x < y\}$. Für ein Relationssymbol R hat jedes Paar vier Möglichkeiten:

$$
\begin{array}{r}
R(x,y) \wedge R(y,x) \\
R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \\
\neg R(x,y) \wedge R(y,x) \\
\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x)
\end{array}
$$

Das heißt, insgesamt teilen alle a_2 Relationssymbole die Menge der Zweiermengen aus U_1 in 4^{a_2} Klassen.

Nach Theorem B gibt es, falls $k_1 \geq h(2, k_2, 4^{a_2})$, eine Teilmenge $U_2 \subset U_1$, deren sämtliche Zweiermengen in die gleiche Klasse gehören — das heißt, sich weder auf ein– noch auf zweistelligen Relationssymbolen unterscheiden.

Diese Konstruktion können wir fortsetzen. Wir erhalten eine Mengenfolge

$$U = U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_{n-1} (\supset U_n)$$

mit der Eigenschaft

$$
\begin{array}{l}
\forall \{y_{\sigma(1)} < \ldots < y_{\sigma(r)}\} \subset U_{\leq r} : \\
\qquad R(y_1, \ldots, y_r) \leftrightarrow R(\sigma(1), \ldots, \sigma(r))
\end{array}
$$

Alle Tupel aus $U_{\leq r}$ unterscheiden sich also *nicht* in ihren Werten auf allen r–stelligen Relationssymbolen.

Um U_r aus U_{r-1} zu erhalten, betrachten wir die Färbung $U_{r-1} \to 2^{r! a_r}$, die jeder r–Menge aus U_{r-1} die Werte aller ihrer Permutationen auf allen r–stelligen Relationssymbolen zuordnet.

Nach dem Theorem von Ramsey enthält U_{r-1}, wenn es groß genug ist, immer eine Teilmenge U_r, deren sämtliche r–Mengen dabei die gleiche Farbe erhalten.

Wir erhalten insgesamt diese Abmessung des Universums: $m_0 \geq 2^{a_1}k_1$ mit

$$
\begin{array}{rcl}
k_{n-1} & = & n \\
k_{r-1} & = & \text{wenn } a_r = 0 \text{ dann } k_r \text{ sonst } h(r, k_r, 2^{r! a_r})
\end{array}
$$

17 Anwendung

Wir spezialisieren die Betrachtungen auf den Fall, daß die Formel F (außer der Identität) nur ein Relationsymbol R enthält, und dieses zweistellig ist.

Das zerfällt dann in zwei Symbole E und Z nach

$$R(x,y) \quad = \quad \text{wenn } x = y \text{ dann } E(x) \text{ sonst } Z(x,y).$$

Ein Alternative (auf n Variablen) ist genau dann linear in E, wenn sie eine der beiden Konjunktionen enthält:

$$(i) \quad E(y_1) \wedge \ldots E(y_n) \qquad (ii) \quad \neg E(y_1) \wedge \ldots \neg E(y_n)$$

und eine Alternative ist linear in Z in jedem der vier Fälle

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \bigwedge\limits_{i<k} Z(y_i, y_k) \wedge Z(y_k, y_i) \\
(b) & \bigwedge\limits_{i<k} Z(y_i, y_k) \wedge \neg Z(y_k, y_i) \\
(c) & \bigwedge\limits_{i<k} \neg Z(y_i, y_k) \wedge Z(y_k, y_i) \\
(d) & \bigwedge\limits_{i<k} \neg Z(y_i, y_k) \wedge \neg Z(y_k, y_i)
\end{array}
$$

Das kann man nun auf acht Weisen zu einer linearen Alternative verknüpfen. Es entstehen folgende Varianten

	(a)	(b)	(c)	(d)
(i)	(1)	(6)	(6)	(3)
(ii)	(4)	(5)	(5)	(2)

Dabei bedeuten die Varianten

(1) $R(x,y) = \text{True}$ (2) $R(x,y) = \text{False}$

(3) $R(x,y) = (x = y)$ (4) $R(x,y) = (x \neq y)$

(5) der strikte Teil $<$ einer linearen Ordnung $\leq$

(6) eine lineare Ordnung $\leq$

Es gilt damit der

Satz: Es gibt ein m_0 (beispielsweise $m_0 = 2 \cdot n!!!$), so daß für jedes $u \geq m_0$ gilt:

Eine Formel F mit Identität und nur einem, binären, Relationssymbol R hat ein Modell der Größe $u \iff$ eine der sechs Interpretationen aus obiger Liste ist Modell für F.

18 Nachwort

Rückblickend auf die weitere Entwicklung sind zwei Bemerkungen erforderlich:

Logik: Ramseys Satz (über die Entscheidbarkeit dieser Formelklasse) gestattet auch einfachere Beweise. Andererseits ist das Gesamtproblem (Erfüllbarkeit) algorithmisch unlösbar.

Graphentheorie: hier erwiesen sich Ramseys Färbungsaussagen als der Grundstein einer sehr allgemeinen Theorie (über einfarbige Teil–Strukturen innerhalb von beliebig gefärbten Strukturen), die viele lustige bis tiefliegende Sätze und Fragen bereithält.

(Siehe auch mein Skript zur Kombinatorik `http://www.informatik.uni-leipzig.de/~joe/edu/ss00/kombinat/`.)

D. H. Mellor (in: The eponymous F. P. Ramsey,
J. Graph Theory 7 (1) (1983), 9–13)

Ramsey's enduring fame in mathematics ...
rests on a theorem he didn't need,
proved in the course of trying to do
something we now know can't be done!

Literatur

[Bra31] R. B. Braithwaite. Frank Plumpton Ramsey. *J. London Math. Soc.*, 6:75–78, 1931.

[EF99] Heinz-Dieter Ebbinghaus and Jörg Flum. *Finite Model Theory.* Springer, 1999.

[OR00] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. The MacTutor History of Mathematics Archive. `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/`, 2000.

[Ram30] Frank P. Ramsey. On a Problem of Formal Logic. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 30:264–286, 1930.