Term-Ersetzungs-Spiele

(*Rewrite Games*, akzeptiert für Conf.
Rewriting Techniques and Applications, Kopenhagen, Juli 2002)

Johannes Waldmann
Institut für Informatik, Universität Leipzig

Spiele in der Informatik

- Komplexitätstheorie:
  - Pebble games (Ein-Personen): Time-Space-Tradeoffs
  - Arthur-Merlin games: definieren Komplexitätsklassen
  - verifizieren kryptografische Protokolle
- Logik, Modelltheorie:
  - Ehrenfeucht-Spiele: trennen Modelle
  - Alternierende (Omega-)Automaten:
  - forgetful determinacy, Rabin's theorem
- Terme, -Ersetzung:
  - Reduktionsstrategien, Modularität
  - (alternierende) (Baum-)Automaten, reguläre Sprachen

Kombinatorische Spiele

- deterministische endliche
- Zweipersonen-Nullsummen-Spiele
- mit vollständiger Information

normal: wer nicht mehr ziehen kann, verliert
(Gegenteil: *misere*, Lasker, Grundy-Smith)

neutral: gleiche Zugmöglichkeiten für beide Spieler
(Gegenteil: *partizan*, Conway)

Beispiele für neutrale normale Spiele

- *Autobahn*:
  - Auto fährt einen Kilometer nach links *oder*
  - Auto geht kaputt und blockiert Straße
- *Rosenkohl*: zeichne eine Kante *und* darauf ein Kreuz
- *Officers*:
  - befördere einen Soldaten zum Offizier *und*
  - weise ihm *wenigstens einen* Untergebenen zu

Neutrale Spiele: Definition

intensional: Spielregeln, *extensional*: Positions-Graph (DAG)

Def: Ein *neutrales Spiel* ist eine Menge von neutralen Spielen.

Das einfachste neutrale Spiel ist $\emptyset$.

Def (*nimbers*): $*0 := \emptyset, \quad *(n+1) := \{*0, *1, \ldots, *n\}$

Def (*Resultatklassen*):
$P(G) :\Longleftrightarrow$ previuos player wins, $N(G) :\Longleftrightarrow$ next player wins.

Beispiele: $P(*0), N(*1), N(*2), \ldots$

Def (*schwache Äquivalenz*): $G \sim H :\Longleftrightarrow (P(G) \iff P(H))$

Disjunkte Summe von Spielen

$G + H := \{g + H : g \in G\} \cup \{G + h : h \in H\}$

bei jedem Zug: spiele *entweder* in G *oder* in H

Beispiele: $P(*n + *n)$. $\quad m < n \Rightarrow N(*m + *n)$. $\quad P(*1 + *2 + *3)$.

Fakt: schwache Äquivalenz ist nicht stabil bzgl. $+$

Def (*starke Äquivalenz*): $G \approx H \iff \forall K : G + K \sim H + K$.

Sprague(-Grundy)-Theorie

Satz: $\forall G\ \exists! n : G \approx *n$. Def: n heißt *Grundy-Wert* von G.

R. Sprague [1935–36], Über mathematische Kampfspiele, *Tôhoku Math. J.* **41**, 438–444.

P. M. Grundy and C. A. B. Smith [1956], Disjunctive games with the last player losing, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **52**, 527–533

Def: für endliches $M \subseteq \mathbb{N}$: mex(M) := min$(\mathbb{N} \setminus M)$.

Lemma: $\{*m_1, \ldots, *m_k\} \approx *m$, wobei $m = \text{mex}\{m_1, \ldots, m_k\}$.

Satz: grundy$(G + H)$ = grundy$(G) \oplus$ grundy(H).

$\oplus$ ist binäre Addition ohne Übertrag

Rewrite Games

terminierendes Term-Ersetzungs-System R, Term t

Optionen von t sind alle $\{t' : t \to_R t'\}$.

wie kompliziert ist die Funktion grundy$_R$: Term $\to \mathbb{N}$?

bzw. die Urbildmengen (*Grundy-Klassen*) grundy$_R^{-1}(n)$?

Beispiel: $R = \{\overset{\bullet}{{}_x\wedge_y} \to x\}$

Satz: grundy$(\overset{\bullet}{{}_X\wedge_Y})$ = grundy$(X) \oplus (1 +$ grundy$(Y))$

Wort-Ersetzungs-Spiele: Beispiel

Autobahn: $\{01 \to 10, 1 \to 2\}$

0 am Ende nützt nichts:	$u0 \approx u$
1 am Anfang interagiert nicht:	$1u \approx 1 + u$
2 ist Trennzeichen:	$u2v \approx u + v$

Satz: $11u \approx u \approx u11$, $u00v \approx uv$.

nicht immer $u11v \approx uv$.

Vermutung (*Praktikum* ... *Diplom*): $P((01)^{4n})$.

Take/Break-Spiele

Spielposition: Multimenge von Zahlen (Haufengrößen)
Spielzug: einen Haufen verkleinern und/oder zerlegen

Officers: $\{\ldots,h,\ldots\} \to \{\ldots,x,y,\ldots\}$ für $x>0, y\geq 0, x+y+1=h$.

Allgemein: Folge $(M_1,M_2,\ldots)$ von $M_k \subset \mathbb{N}$ erlaubt:
wenn $m \in M_k$, dann: k Steine von h wegnehmen,
und Rest in m nichtleere Haufen teilen

Officers $= (\{1,2\},\emptyset,\ldots)$

Kayles $:= (\{0,1,2\},\{0,1,2\},\emptyset,\ldots)$

James Bond $:= (\emptyset,\emptyset,\{0,1,2\},\emptyset,\ldots)$

... und oktale Spiele

Officers $= (\{1,2\},\emptyset,\ldots)$ *Binärcode*: $(2^1+2^2,0,\ldots) = 0.6$

Def: Take/Break-Spiel heißt *oktal*, wenn alle Code-Zahlen ≤ 7.

Kayles: $(\{0,1,2\},\{0,1,2\},\emptyset,\ldots) \Rightarrow (2^0+2^1+2^2,2^0+2^1+2^2,0,\ldots) = 0.77$

Bond: $(\emptyset,\emptyset,\{0,1,2\},\emptyset,\ldots) \Rightarrow (0,0,2^0+2^1+2^2,0,\ldots) = 0.007$

Hauptvermutung (Conway, Guy, ≈ 1980):
Take/Break-Spiel oktal $\Rightarrow$ Grundy-Werte beschränkt.

offen (!) z. B. für Officers (grundy(10342) = 256)
und James Bond (grundy(109362) = 1024).

Oktale Spiele als Wort-Ersetzungs-Spiele

Position $\{h_1,h_2,\ldots,h_n\} \Rightarrow$ Wort $DU^{h_1}DU^{h_2}\ldots DU^{h_n} \in \{U,D\}^*$.

Satz: Jedes oktale Spiel entspricht einem Wort-Ersetzungs-Spiel.

Beispiele: Officers: $\{UU \to DU\}$,
Kayles: $\{U \to D, UU \to D\}$, James Bond: $\{UUU \to D\}$.

Def: (Grundy-*Folge*) (grundy(U^0), grundy(U^1), grundy(U^2), ...)

Satz: Grundy-Folge beschränkt $\iff$ schließlich periodisch.

Satz: ... $\iff$ endlich viele Grundy-Klassen und jede ist regulär.
Spiel 0.16 hat Periodenlänge 149459.
Spiel 0.376 hat Periodenlänge 4, aber Vorperiode 2268247.

Rewriting, Automaten, reguläre Sprachen

(Approximation von) Nachfolger-, Vorgängermengen
(Jaqcuemard, Genet, Statman, Waldmann, . . .)

Grundinstanzen, Linearisierung, Testmengen (Hofbauer, Huber)

Redex-Eigenschaften (neededness), optimale Strategien
(Middeldorp)

higher order matching (Comon)

$$\left.\begin{array}{l}\text{set constraints (Heintze, Jaffar) ,}\\ \text{tree set automata (Tison, Gilleron)}\\ \text{Logische Theorie von Term-Ersetzungs-}\\ \text{Relationen (Tommasi, Treinen)}\end{array}\right\} \iff \text{Spiele}$$