Term-Ersetzungs-Spiele (II)

Johannes Waldmann
Institut für Informatik, Universität Leipzig

Wdhlg: Kodierung von Take/Break-Spielen

$\{h_1, h_2, \ldots, h_n\} \approx DU^{h_1} DU^{h_2} \ldots DU^{h_n}$

officers: *take* 1, *break* in 1 oder 2: $UU \to DU$

James Bond: *take* 3, *break* in 0,1 oder 2: $UUU \to D$

Standard-Nim: *take* beliebig viele, *break* nicht: $U^+ \to \epsilon$

(grundy(U^0), grundy(U^1), ...) schließlich periodisch

$\iff$ P (= Verlustpositionen) ist reguläre Sprache

$DU^{h_1} \ldots DU^{h_n} \in P \iff 0 = \text{grundy}(U^{h_1}) \oplus \ldots \oplus \text{grundy}(U^{h_n})$

Grundy-Klassen und Gleichungssysteme

$P = \text{Term}(\Sigma)^* \setminus R^{-1}(P)$

$C_n := \{t : \text{grundy}(t) = n\}$

$C_n = (R^{-1}(C_0) \cap \ldots \cap R^{-1}(C_{n-1})) \setminus R^{-1}(C_n)$

R terminiert $\Rightarrow$ Lösung ist eindeutig. Konstruierbar? Rational?

Set-Constraint-Systeme

Syntax: $E_1 \subseteq E_2, E_1 \not\subseteq E_2$, wobei E zusammengesetzt aus:

- Konstruktoren: $f(E_1, \ldots, E_n) = \{f(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in E_i\}$,
- boolesche Konstanten 0, 1 und Operationen $\cup, \cap, \setminus$

Erfüllbarkeit ist entscheidbar. (Finite model property der monadischen Klasse, Löwenheim 1915, Ackermann 1928 (1954?), Bachmair, Ganzinger, U. Waldmann 1992)

Falls erfüllbar, dann auch durch rationale Sprachen.
(Tree Set Automata, Gilleron, Tison, Tommasi 199?)

Subtraktions-Spiele: $R = \{U^s \to \epsilon : s \in S\}$

$R^{-1}(X) = \bigcup_{s \in S} U^s X, \qquad P = U^* \setminus \bigcup_{s \in S} U^s P$

Set Constraints mit Projektionen

- $f_k^{-1}(E) = \{x : f(\ldots, x, \ldots) \in E\}$ (Charatonik, Pacholski, 1994)

$$R = \left\{ f(g(\boxed{x}, a), b) \to h(c, \boxed{x}) : x \in \text{Term}(\Sigma) \right\}$$

$$R^{-1}(L) = f\left(g\left(\boxed{h_2^{-1}(L \cap h(c, \boxed{1}))}, a\right), b\right)$$

top-rewriting(-Spiele) mit einer Variablen: $\forall n : C_n \in \text{RAT}$

dual zu ground rewriting ($\Rightarrow$ ground tree transducer!)

Der Kombinator $\mathbf{I}$: $\bullet(\mathbf{I}, x) \to x$

nur eine Normalform $\mathbf{I}$

alle Reduktionen $t \to^* \mathbf{I}$ gleich lang

$\Rightarrow$ genau zwei Grundy-Klassen (Parität der Anzahl der $\mathbf{I}$):

$$C_0 \to \mathbf{I} \cup \bullet(C_0, C_1) \cup \bullet(C_1, C_0), \quad C_1 \to \bullet(C_0, C_0) \cup \bullet(C_1, C_1),$$

$C_0, C_1 \in \text{RAT}$

Der Kombinator $\mathbf{F}$: $\bullet(\bullet(\mathbf{F}, x), y) \to \bullet(y, x)$.

Normalformen: $F_1 := \mathbf{F}$, $F_{n+1} = \bullet(\mathbf{F}, F_n)$.

$\text{dist}(t) = \text{size}(t) - \text{size}(\text{nf}(t))$,

$\text{nf}(\bullet(F_a, F_b)) =$ if $a > b$ then F_{a+1-b} else F_{b+2-a}.

$\text{dist}(\bullet(F_a, F_b)) \equiv$ (if $a > b$ then 1 else 0) $\pmod 2$.

$C_0 \cap \bullet(F_*, F_*) = \{\bullet(F_a, F_b) : a \le b\} \notin \text{RAT}$.

Algebraische (kontextfreie) Sprachen

TRS-Regel $l \to r$ *monadisch*, wenn $l = f(x_1, \ldots, x_n)$, wobei x_i paarw. verschieden, r beliebig.

Signatur Σ, (beliebig-stellige) Extra-Symbole F, (null-stelliges) Startsymbol $f_S \in F$.

Monadisches TRS R mit allen $f \in F$ definiert Sprache $L(R) := \{t : f_S \to_R^* t \wedge t \in \text{Term}(\Sigma)\}$.

Diese Sprachen heißen *algebraische* Baumsprachen.

Falls alle $f \in F$ nullstellig, dann *rationale* Baumsprachen.

Abschluß-Eigenschaften

Rationale Baum-Sprachen erkennbar durch endliche Automaten, und abgeschlossen gegen Boolesche Operationen.

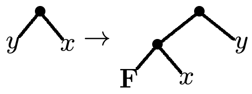
Algebraische Sprachen abgeschl. gegen Schnitt mit rationalen.

Homomorphismus ist monadisches TRS, bei dem alle linken top-Symbole verschieden sind.

Rationale Sprachen abgeschl. gegen inverse Homomorphismen und gegen lineare Homomorphismen.

Algebraische Sprachen sind abgeschl. gegen Morphismen und inverse Morphismen.

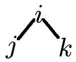
Verteiltes Zählen für $\mathbf{F}$

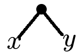
 monadisch. $\Rightarrow$ $\mathbf{F}^{-*}(\{t\}) \in$ ALG.

gesucht: $C_0 = \mathbf{F}^{-\text{gerade}}(N)$, $C_1 = \mathbf{F}^{-\text{ungerade}}(N)$

ersetze Signatur $\Sigma = \{\mathbf{F},$  $\}$ durch $\Sigma' = \{\mathbf{F},$ ,  $\}$.

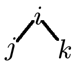
$H = \{t \in \text{Term}(\Sigma') : \text{dist}(\text{drop}(t)) \equiv \text{expo}(t) \pmod 2\}$

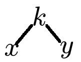
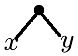
expo : Term(Σ') $\to \{0,1\}$: $\mathbf{F} \mapsto 0,$  $\mapsto (i + j + k \bmod 2)$

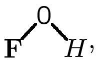
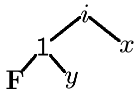
drop : Term(Σ') $\to$ Term(Σ) : $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F},$  $\mapsto$ 

Verteiltes Zählen für $\mathbf{F}$ (II)

$H = \{t \in \text{Term}(\Sigma') : \text{dist}(\text{drop}(t)) \equiv \text{expo}(t) \pmod 2\}$

expo : Term(Σ') $\to \{0,1\}$: $\mathbf{F} \mapsto 0,$  $\mapsto (i + j + k \bmod 2)$

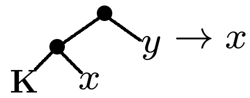
drop : Term(Σ') $\to$ Term(Σ) : $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F},$  $\mapsto$ 

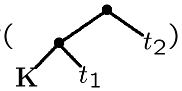
$H \to \mathbf{F} \cup$ ,  $\to$ 

$C_i = \text{drop}(H \cap \text{expo}^{-1}(i))$.

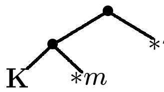
Abschluß-Eigenschaften $\Rightarrow C_0, C_1 \in$ ALG.

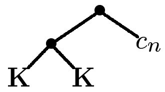
Konstruktion funktioniert für alle linearen, nicht überlappenden, invers monadischen TRS-Spiele.

Der Kombinator $\mathbf{K}$: 

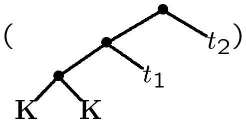
grundy() = grundy(t_1) $\oplus$ (1 + grundy(t_2)).

Beweis: Gewinnstrategie für zweiten Spieler in

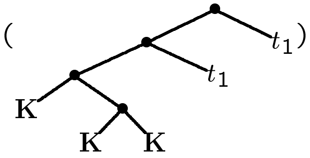
 $+ *m + *(n+1)$

Folg. Für $c_0 = \mathbf{K}, c_{n+1} =$  gilt grundy(c_n) $= n$.

Der Kombinator $\mathbf{K}$ (II)

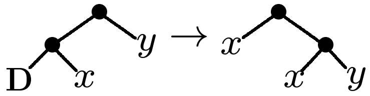
grundy(

) = (1 + grundy(t_1)) $\oplus$ grundy(t_2).

grundy(

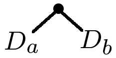
) = 0.

grundy$_{\mathbf{K}}$ ist kein Morphismus: Es gibt Kontext $C[]$ und Terme t, t' mit grundy(t) = grundy(t'), für die grundy$(C[t]) \neq$ grundy$(C[t'])$.

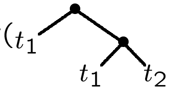
Der Kombinator $\mathbf{D}$: 

Normalformen: $D_0 = \mathbf{D}$, $D_{n+1} =$ 

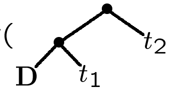
.

es gibt sehr lange Reduktionen: 

$\xrightarrow{\geq 2^a - 1} D_{2^a+b}$.

grundy(

) = grundy(t_2).

grundy(

) = (1 + grundy(t_1)) $\oplus$ grundy(t_2).

Rewrite games: Fragen, Ziele

- Berechne grundy$_R$: Term$(\Sigma) \to \mathbb{N}$.
- Für welche TRS R ist grundy$_R$() beschränkt?
- Berechne $C_n = \{t : \text{grundy}_R(t) = n\}$.
- Für welche TRS R sind C_n rational? algebraisch?

$\Rightarrow$ Zusammenhänge TRS, Komplexität, Sprachen, Automaten

$\Rightarrow$ Beweis der Hauptvermutung über oktale Spiele