Baumweite, historisch betrachtet

Johannes Waldmann

Institut für Informatik, Universität Leipzig

- Reinhard Diestel: *Minoren, Bäume und WQO*, Kap. 10 in: *Graphentheorie*, Springer 1996
- Ton Kloks: *Treewidth*, Springer LNCS 842 (1994)
- Detlef Seese: *Interpretability and Tree Automata*, pp 83–114 in Nivat, Podelski (ed.): *Tree Automata and Languages*, Elsevier 1992

Graphen-Färbungen

k-Färbung f des Graphen $G = (V, E)$ ist
$f : V \to \{1, \ldots, k\}$ mit $\forall xy \in E : f(x) \neq f(y)$.

Chromatische Zahl $\chi(G)$ ist kleinstes k,
für das G eine k-Färbung besitzt.

Ein Graph $G = (V, \{xy : x, y \in V \wedge x \neq y\})$ heißt Clique.

Cliquen-Zahl $\omega(G)$ ist die maximale Größe einer Clique in G.

Offensichtlich $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Perfekte Graphen

G *perfekt*, wenn für alle $H \subseteq G$ gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

perfect graph conjectures (Claude Berge, 1960)

- (weak) G perfekt $\iff$ Komplement von G perfekt (Beweis: Lovasz 1972)
- (strong) G minimal imperfekt $\iff$ $\exists n \geq 2 : G = C_{2n+1} \vee G = \overline{C_{2n+1}}$.

Chordale Graphen

Def. G chordal (“trianguliert”), wenn jeder Kreis $H \subseteq G$ der Länge ≥ 4 eine Sehne (chord) besitzt.

Satz. G chordal $\Rightarrow$ G perfekt.

Beobachtung: viele NP-vollständige Probleme werden *einfach* für chordale Graphen, denn ...

Satz. G chordal $\iff$ besitzt perfect elimination scheme (p.e.s.):

Def. $v \in G$ *simplizial*, wenn Nachbarschaft $G(v)$ Clique ist.

Def. Knoten-Reihenfolge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ heißt p.e.s., wenn $\forall i : v_i$ ist simplizial in $G[v_1, \ldots, v_{i-1}]$.

(Partial) k-trees

Def. G ist ein k-tree, wenn im perfect elimination scheme alle Cliquen die Größe k haben.

(Harary, Palmer, 1955, 1968)

1-trees *sind* Bäume!

Def. G ist partial k-tree, wenn $\exists H \supseteq G$ und H ist k-tree.

partial 2-trees $\approx$ Reihen/Parallel-Schaltungen

(Macmahon, 1892)

Def. Baumweite $\mathrm{tw}(G) = \min_k \{G \text{ ist partial } k\text{-tree}\}$

Baumweite

Def. Eine Baumzerlegung von G ist (S, T) mit

- T ist Baum
- S ist Mengensystem : $V(T) \to 2^{V(G)}$
- $\forall xy \in E(G) : \exists t \in T : xy \subseteq S(t)$
- Helly-Eigenschaft: $\forall x \in G : \{t : x \in S(t)\}$ ist Baum.

Def. Weite einer Baumzerlegung ist $\max\{|S(t)| : t \in T\} - 1$

Satz. $\mathrm{tw}(G) =$ kleinste Weite einer Baumzerlegung von G.

Anwendungen (I): Minoren und WQO

Def. G ist *Minor* von H, $(G \leq H)$: G enstheht aus H durch

- Knoten- oder Kanten-Löschungen
- Kanten-Kontraktionen

Vermutung (Wagner, 1940 ?)
Die Minoren-Relation ist Wohl-Quasi-Ordnung auf Graphen.

Beweis (Robertson, Seymour, 1985 $\ldots$ 1996 $\ldots$): benutze
Satz von Kruskal (1960, $\leq$ ist WQO auf Bäumen), und:

Satz: Wenn G planar, dann ist $\{\mathrm{tw}(H) : G \not\leq H\}$ beschränkt.

Anwendungen (II): Erbliche Graph-Eigenschaften

Def. Eigenschaft P ist *erblich*, falls $P(G) \Rightarrow \forall H \leq G : P(H)$.

Satz. Für jedes erbliche P existiert endliche Menge
$M = \{M_1, \ldots, M_n\}$ mit $P(G) \iff \neg\exists M_i \in M : M_i \leq G$.

Man kann $G \leq H$ in Zeit $O(\exp(|G|) \cdot |H|^3)$ entscheiden.

$\Rightarrow$ Polynomialzeitalgorithmen!

Anwendungen (III): Separatoren

Satz. Jeder Graph mit n Knoten und Baumweite k
enthält eine Menge $S \subseteq V(G)$ mit $|S| \leq k + 1$,
so daß für jede Zusammenhangs-Komponente
H von $G \setminus S$ gilt: $|H| \leq (n - k)/2$.

$\Rightarrow$ "Teile und Herrsche"-Algorithmen in Polynomialzeit!

Anwendungen (IV): Logik

WSkS : schwache Logik zweiter Stufe mit k Nachfolgern
($\approx$ Theorie der endlichen $k-$nären Bäume)
ist entscheidbar.

Beweis: endliche Automaten auf Bäumen.

Verallgemeinern auf Graphen mit beschränkter Baumweite.

Gitter und (Un-)Entscheidbarkeit

$Q_n :=$ Quadratgitter $n \times n$

$Q_n \not\leq G \Rightarrow \mathrm{tw}(G) \leq O(\exp(n^5)) \Rightarrow$ Entscheibarkeit

Auf Q_n Rechnung einer Turingmaschine simulieren:
(Koordinaten: Zeit, Platz)

$\Rightarrow$ Falls beliebig große $Q_n \leq G$, dann Theorie *nicht* entscheidbar.

Beweis: Reduktion vom Halteproblem.