Projektvorschlag für Wissenschaftssommer 2008: Die schwersten Spiele ihrer Klasse

Johannes Waldmann und Wolfgang Wittig, HTWK Leipzig

14. September 2007

Teil I

Allgemeines

1 Inhalt

- praktische Aufgabenstellungen (Ressourcen-Zuordnung, Wegplanung usw.)
- werden mathematisch exakt modelliert
- die Modelle sind oft Spiele (Puzzles)
- ausgehend von Modellen kann man algorithmische Lösungen finden
- und die Schwere der Aufgabe/Effizienz der Lösung einordnen
- in der Informatik: Komplexitätstheorie,
- mathematische Grundlagen: diskrete Mathematik, Kombinatorik, Graphentheorie

2 Zielgruppe

Schüler ab 5. Klasse; deren Lehrer; allgemein wissenschaftlich interessierte Öffentlichkeit.

3 Methode

- konkrete Exponate zum Ausprobieren (Spiele, Puzzles)
- Zuordnung der Spiele zu Motivation (Anwendung) und Theore (Komplexitätsklasse) durch Poster, Handzettel, Standbetreuer

- Interaktive Webseite zum Betrachten von Aufgaben (die z. T. den Exponaten entsprechen), Eingeben von Lösungen, mit sofortiger Bewertung und Speicherung für Sammelauswertung (Highscores) nach gewisser Zeit.

4 Partner, verwandte Projekte

- E-Testing-Werkzeug autotool `http://www.imn.htwk-leipzig.de/~waldmann/autotool/`

  mit noch anzupassender, speziell zugeschnittener Benutzeroberfläche

- Leipziger Schülergesellschaft für Mathematik `http://www.lsgm.de/`

  langjährige Erfahrung in der mathematischen Schülerbildung

5 erwünschte Nebenwirkungen

- (Highscore/Preis-)Aufgaben über einen längeren Zeitraum (Woche) online: länger anhaltende Beschäftigung (als nur einmal kurz am Exponat); z. B. können sich Schüler im Unterricht weiter mit Aufgaben auseinandersetzen (dazu evtl. kurze Handreichung für interessierte Lehrer ausarbeiten)

- Bei Bearbeitung der Online-Aufgaben: deutlicher Verweis (Links usw.) auf HTWK (Studienwerbung) und LSGM (erhöht Attraktivität)

- Aufgaben-Webseite kann zu diesen Zwecken auch unabhängig weiter genutzt werden

- Preise gestiftet von Sponsoren, z. B. lokale IT-Unternehmen („wer diese Aufgabe lösen kann, wird sofort eingestellt„u.ä.)

Teil II
Mögliche Exponate/Aufgabentypen (gegenständlich)

6 Komplexität von (Such)problemen

Idee: je ein Beispiel aus Komplexitätsklassen

- P: Sortieren

  Sortieren (von verdeckten Spielkarten) mit möglichst wenig Fragen

- NP: Graphenfärben, Vertex Cover

  Graph ausdrucken (A3), Knotenfärben, Knotenüberdeckung durch Spielsteine

- NP: SAT
- NP: Binpacking
- PSPACE: Verschiebe-Puzzles (Lunar Lockout usw.)
- RE: Postsches Korrespondenzproblem

jeweils Diskussion der Größe des Suchraumes möglich

Teil III
Mögliche Exponate/Aufgabentypen (Online)

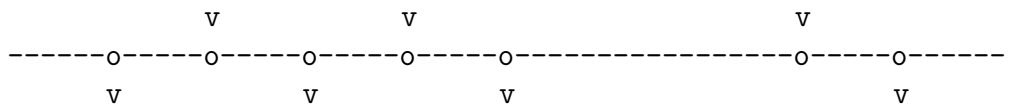
Können getestet werden unter `https://autotool.imn.htwk-leipzig.de/cgi-bin/Super.cgi` Schule: HTWK, Matrikel: 319, Passwort: loqzotepos, Semester: Sommer07, Vorlesung: WEL-Demonstration.

6.1 Sortiernetze

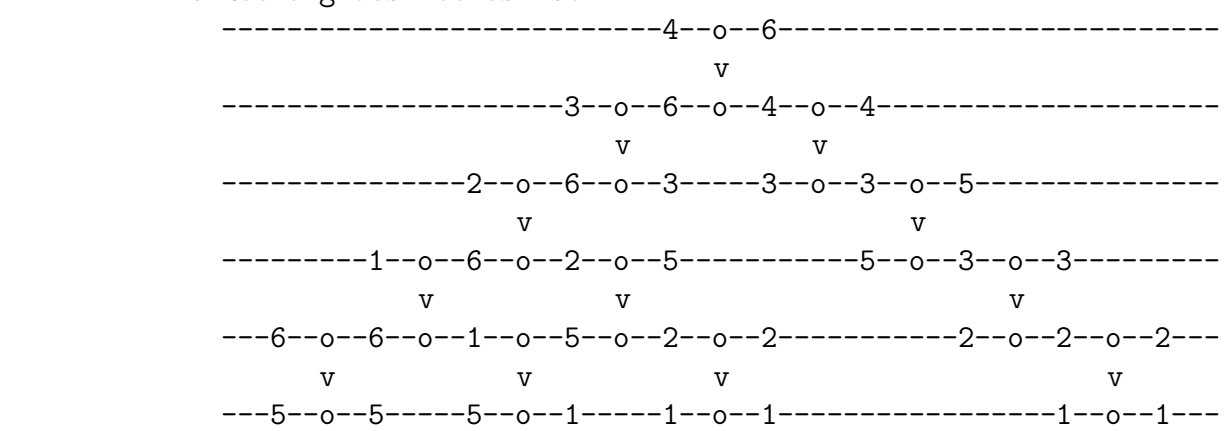
Ein Komparator ordnet zwei Eingaben (Ausgaben: max oben, min unten).
Ein Netz besteht aus mehreren (möglichst wenigen) Komparatoren.

Beispiel (Sortier-Direct-12):

```
Finden Sie ein Sortiernetz für 6 Eingänge
mit weniger als 15 Komparatoren.

gelesen: mkNetz [ ( 1 , 2 ) , ( 2 , 3 ) , ( 1 , 2 ) , ( 3 , 4 )
                , ( 2 , 3 ) , ( 1 , 2 ) , ( 4 , 5 ) , ( 5 , 6 ) , ( 4 , 5 )
                , ( 3 , 4 ) , ( 2 , 3 ) , ( 1 , 2 )
                ]

partiell korrekt?

Ihr Netz ist: ----------------------------o----------------------------
                                         v
              ----------------------o-----o-----o----------------------
                                    v           v
              -----------------o-----o-----------o-----o-----------------
                               v                       v
              ------------o-----o-----o-----------------o-----o------------
```



```
total korrekt?

Diese Eingabe wird nicht korrekt geordnet:
    [ 5 , 6 , 1 , 2 , 3 , 4 ]
Das Netz berechnet die Ausgabe:
    [ 1 , 2 , 3 , 5 , 4 , 6 ]
Die Rechung des Netzes ist:
```



6.2 Graphenfärben

Gegeben ist ein Graph (Bild), gesucht eine konfliktfreie Knotenfärbung mit vorgegebener Farbzahl.

Test: Col-Quiz-4

6.3 Lunar Lockout

Beispiel (Robots-Quiz-4)

```
Geben Sie eine Zugfolge an,
die den Roboter (Großbuchstabe)
ins Ziel (entsprechender Kleinbuchstabe) bringt:

    C . A . . . B
    . . e . . . .
    D . . . . . .
    . . . . . . .
    . . . . . E .

gelesen: [ ( "A" , O ) , ( "E" , N ) , ( "A" , W ) ]

partiell korrekt?

C . A . . . B
```

```
. . e . . . .
D . . . . . .
. . . . . . .
. . . . . E .
    nächster Zug: ( "A" , O )

C . . . . A B
. . e . . . .
D . . . . . .
. . . . . . .
. . . . . E .
    nächster Zug: ( "E" , N )

C . . . . A B
. . e . . E .
D . . . . . .
    nächster Zug: ( "A" , W )

C A . . . . B
. . e . . E .
D . . . . . .

total korrekt?

C A . . . . B
. . e . . E .
D . . . . . .

Sind alle Roboter an ihren Zielpunkten?
Diese ja:  [ ]
Diese nicht:  [ Robot { name = "E" , position = ( 2 , 1 )
                      , ziel = Just ( -1 , 1 )
                      }
              ]
```

6.4 Postsches Korrespondenzproblem

Test: PCProblem-Quiz-4

```
Lösen Sie diese Instanz des Postschen Korrespondenz-Problems:
    PCP [ ( "cb" , "aa" ) , ( "b" , "cb" ) , ( "cabaab" , "cab" )
        , ( "c" , "b" )
        ]

gelesen: [ 3 , 1 , 4 , 2 , 3 ]

Aus Ihrer Folge entstehen die Zeichenketten:
cabaabcbcbcabaab
cabaabcbcab
```

```
Die eine muß ein Präfix der anderen sein,
nach Löschen des gemeinsamen Präfixes
    "cabaabcbc"
entstehen jedoch die Reste
    ( "bcabaab" , "ab" )
```

7 Codierungstheorie

Beispiel (Hamming-Direct-6)

```
Gesucht ist ein Code (als Liste von Wörtern über L, R)
mit diesen Eigenschaften:
    Config { width = ( Atmost , 6 )     -- Wortlänge
           , size = ( Atleast , 4 )     -- Anzahl der Wörter
           , distance = ( Atleast , 3 ) -- Hamming-Abstand
           , optimize = Size            -- möglichst viele Wörter
           }

gelesen: [ [ L , L , L , L , L , L ] , [ R , R , R , L , L , L ]
         , [ L , L , L , R , R , R ] , [ R , R , R , R , R , R ]
         , [ R , L , R , L , R , L ]
         ]

Haben alle Code-Wörter die gleiche Länge?

Ja: 6

Die Hamming-Weite dieses Codes ist: 2
zwei Wörter mit diesem Abstand sind: ( [ R , R , R , L , L , L ]
                                     , [ R , L , R , L , R , L ]
                                     )

total korrekt?

die Width soll höchstens 6 sein

    Ja.

die Size soll wenigstens 4 sein

    Ja.

die Distance soll wenigstens 3 sein

    Nein.
```

Diskussion: wie man mit algebraischen Überlegungen günstige Codes konstruiert, Verweis auf Verwendung in Mobilfunk, Datenspeicherung auf CD usw.

8 Algebraische Ausdrücke (Operatoren)

8.1 Mengen

```
Algebraic_Set-Direct-2

Gesucht ist ein Ausdruck (Term) mit dieser Bedeutung:
    {{}, {1, 3, {2}}, {1, {2}}, {3, {2}}, {{2}}}
Der Ausdruck soll höchstens die Größe 10 haben.
Sie dürfen diese Symbole benutzen
    zweistellige : [ + , - , & ]
    einstellige  : [ pow ]
    nullstellige : [ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ]
und diese vordefinierten Konstanten:
    A = {{2}}
    B = {1, 3}

gelesen: pow (1 + pow (2))

partiell korrekt?

Die Baumstruktur Ihrer Einsendung ist:
    pow
    |
    `- +
       |
       +- pow
       |  |
       |  `- 2
       |
       `- 1

Die Größe Ihres Ausdrucks ist 5

total korrekt?

Der Wert Ihres Terms ist
    {{}, {1}, {1, {}}, {1, {}, {2}}, {1, {2}}, {{}}, {{}, {2}}, {{2}}}

stimmen die Werte überein?

Nein, diese Elemente kommen nur in jeweils einer der Mengen vor:
    {{1}, {1, 3, {2}}, {1, {}}, {1, {}, {2}}, {3, {2}}, {{}},
     {{}, {2}}}
```

8.2 Relationen

```
Algebraic_Relation-Direct-5

Die folgende Aufgabe bezieht sich auf Relationen
```

```
über dem Grundbereich mkSet [ 1 , 2 , 3 , 4 ]

Gesucht ist ein Ausdruck (Term) mit dieser Bedeutung:
    {(4 , 1)}
Der Ausdruck soll höchstens die Größe 7 haben.
Sie dürfen diese Symbole benutzen
    zweistellige : [ + , - , & , * ]
    einstellige  : [ inv , tcl , rcl ]
    nullstellige : [ ]
und diese vordefinierten Konstanten:
    R = {(1 , 2) , (3 , 4)}
    S = {(2 , 3)}

gelesen: R * S + S

partiell korrekt?

Die Baumstruktur Ihrer Einsendung ist:
    +
    |
    +- S
    |
    `- *
       |
       +- S
       |
       `- R

Die Größe Ihres Ausdrucks ist 5

total korrekt?

Der Wert Ihres Terms ist die Relation
    {(1 , 3) , (2 , 3)}

stimmen die Relationen überein?

Stimmen die Menge
    Aufgabenstellung = mkSet [ ( 4 , 1 ) ]
und die Menge
    Einsendung = mkSet [ ( 1 , 3 ) , ( 2 , 3 ) ]
überein?

Nein.
```

8.3 Graphen

(Konstanten: Kreis, Clique; Operatoren: Komplement, Produkt, Kantengraph)

8.4 boolesche Funktionen

(Darstellung in gegebener Basis)

9 Weiter denkbare Aufgaben (Experimentell)

das hat Bezüge zur Forschung (Waldmann).

Zum interaktiven Ausprobieren muß man aber noch glitzernde Oberflächen bauen.

- Wortersetzung: Schleifen finden,

  Bsp: Regelmenge $\{100 \rightarrow 00110\}$, zu finden ist Schleife $\underline{100}00 \rightarrow 001\underline{100} \rightarrow 001001\underline{100} \rightarrow 00100\underline{100}110 \rightarrow 00\boxed{10000}110110$

  Bsp: finde Schleife für $\{cb \rightarrow bba, ab \rightarrow bca\}$.

- Wortersetzung: Termination durch Interpretation

  finde lineare additive Gewichte (löse lineares Ungleichungssystem),

  finde Matrix-Interpretation (Schieberegler für Matrix-Einträge)

- Wortersetzung: matchbounds und inverse Matchbounds