# Kombinatorik

## Anordnungs- und Auswahlmöglichkeiten von Elementen einer Menge:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Frage-stellungen:*** | *eine konkrete Möglichkeit:* | Element | Beispiel: $p_1 = (1\ 3\ 2)$ |
| | *alle Möglichkeiten:* | Menge *aller ...* | Beispiel: $\mathbf{P} = \{ p_1, p_2, ... \}$ |
| | *Anzahl aller Möglichkeiten:* | Mengenmächtigkeit | Beispiel: $P = \lvert \mathbf{P} \rvert$ |

## Anordnungen - *Permutationen*

| | |
|---|---|
| **Anordnung von *n* verschiedenen Elemente** | Beispiel: $n = 3$, Elemente $a, b, c$ |
| **Permutation** - konkrete Anordnung $p_k$, ($k = 1, 2, ...$) | $p_1 = abc$, $p_2 = acb$, $p_3 = bac$, .. |
| in natürlicher (lexikografischer) Reihung: | $abc$, $acb$, $bac$, $bca$, $cab$, $cba$ |
| Inversionen - Fehlstellungen gegenüber natürl. Reihenfolge | 1 für $acb$ wegen $c$ vor $b$ |
| gerade Permutation - gerade Inversionenzahl | 0: $abc$, 2: $bca$, $cab$ |
| ungerade Permutation - ungerade Inversionenzahl | 1: $acb$, $bac$, 3: $cba$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Beispiel: $n = 3$: Abbildung, Umordnungsvorschrift | $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$ |
| Abbildungsergebnis | $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1&3&2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}2&1&3\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}3&1&2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}2&3&1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}$ |
| ↓ Ausgangsmuster<br>Zielmuster ↓ | $\downarrow\begin{matrix}abc\\abc\end{matrix}\downarrow$ | $\downarrow\begin{matrix}abc\\acb\end{matrix}\downarrow$ | $\downarrow\begin{matrix}abc\\bac\end{matrix}\downarrow$ | $\downarrow\begin{matrix}abc\\bca\end{matrix}\downarrow$ | $\downarrow\begin{matrix}abc\\cab\end{matrix}\downarrow$ | $\downarrow\begin{matrix}abc\\cba\end{matrix}\downarrow$ |
| Zielmuster | $abc$ | $acb$ | $bac$ | $bca$ | $cab$ | $cba$ |
| zyklische Schreibweise | (1) | (2 3) | (1 2) | (1 3 2) | (1 2 3) | (1 3) |

| | |
|---|---|
| **Menge der Permutationen** - $\mathbf{P}_n = \{ p_1, p_2, ... \}$ | $\mathbf{P}_3 = \{ abc, acb, bac, bca, cab, cba \}$ |
| **Anzahl der Permutationen** - $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ | $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ |

| | |
|---|---|
| **Anordnung von *n* Elemente bei *k* Sorten**<br>**mit Sortenhäufigkeiten $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$** | Beispiel: $n = 3$, Elemente $a, a, b$<br>$n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_1 + n_2 = 3$ |
| **Permutation** - konkrete Anordnung $p_k$, ($k = 1, 2, ...$) | $p_1 = aab$, $p_2 = aba$, $p_3 = baa$ |
| **Menge der Permutationen** - $\mathbf{P}_n^{n_1, n_2, \ldots} = \{ p_1, ... \}$ | $\mathbf{P}_3^{2,1} = \{ aab, aba, baa \}$ |
| **Anz. d. Permutationen** - $P_n^{n_1, n_2, \ldots} = n! / (n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots)$ | $P_3^{2,1} = 3! / (2! \cdot 1!) = 6 / (2 \cdot 1) = 3$ |

## Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge (der Anordnung) - *Variationen*

| | |
|---|---|
| **Auswahl von *k* aus *n* Elemente ohne Wiederholung** | Beispiel: $n = 3$, $k = 2$, Elemente $a, b, c$ |
| **Variation** - konkrete Auswahl $v_k$, ($k = 1, 2, ...$) | $v_1 = ab$, $v_2 = ac$, $v_3 = ba$, ... |
| **Menge der Variationen** - $\mathbf{V}_n^k = \{ v_1, ... \}$ | $\mathbf{V}_3^2 = \{ ab, ac, ba, ... \}$ |
| **Anzahl der Variationen** - $V_n^k = n! / (n-k)!$ | $V_3^2 = 3! / (2-1)! = 6 / 1 = 6$ |
| **Auswahl von *k* aus *n* Elemente mit Wiederholung** | Beispiel: $n = 3$, $k = 2$, Elemente $a, b, c$ |
| **Variation** - konkrete Auswahl $v_k$, ($k = 1, 2, ...$) | $v_1 = aa$, $v_2 = ab$, $v_3 = ba$, ... |
| **Menge der Variationen** - $\mathbf{V}_n^k{}_W = \{ v_1, ... \}$ | $\mathbf{V}_3^2{}_W = \{ aa, ab, ac, ba, ... \}$ |
| **Anzahl der Variationen** - $V_n^k{}_W = n^k$ | $V_3^2{}_W = 3^2 = 9$ |

## Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge (der Anordnung) - *Kombinationen*

| | |
|---|---|
| **Auswahl von *k* aus *n* Elemente ohne Wiederholung** | Beispiel: $n = 3$, $k = 2$, Elemente $a, b, c$ |
| **Kombination** - konkrete Auswahl $c_k$, ($k = 1, 2, ...$) | $c_1 = ab$, $c_2 = ac$, $c_3 = bc$ |
| **Menge der Kombinationen** - $\mathbf{C}_n^k = \{ c_1, ... \}$ | $\mathbf{C}_3^2 = \{ ab, ac, bc \}$ |
| **Anzahl der Kombinationen** - $C_n^k = \binom{n}{k}$ | $C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{6}{2} = 3$ |
| **Auswahl von *k* aus *n* Elemente mit Wiederholung** | Beispiel: $n = 3$, $k = 2$, Elemente $a, b, c$ |
| **Kombination** - konkrete Auswahl $c_k$, ($k = 1, 2, ...$) | $c_1 = aa$, $c_2 = ab$, $c_3 = bb$, ... |
| **Menge der Kombinationen** - $\mathbf{C}_n^k{}_W = \{ c_1, ... \}$ | $\mathbf{C}_3^2{}_W = \{ aa, ab, ac, bb, ... \}$ |
| **Anzahl der Kombinationen** - $C_n^k{}_W = \binom{n+k-1}{k}$ | $C_3^2{}_W = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$ |