Logik - Aussagenlogik

Logische Konstanten und Variable:

Aussagenlogische Konstanten: **W**, **F** (Wahrheitswerte: **W**...wahr, true; **F**... falsch, false)

Aussagenlogische Variable: $p, q, \ldots$ (zuordenbare Werte: **W**, **F**)

Aussagenlogische Ausdruck:

werden aus (mittels logischer Operatoren) verknüpften aussagenlogischen Variablen (und Konstanten) gebildet.

Wahrheitswertfunktion: **w(...)** (zuordenbare Werte: **W**, **F**)

weist aussagenlogischem Ausdruck seinen Wahrheitswert zu.

Logische Operationen (Funktoren) **w(...) =**

1-stellige logische Operation	**Bedeutung**	**Funktor**	**Operand p:**	**W F**
Negation	"nicht ..."	NOT	$\neg p$ oder $\overline{p}$	**F W**
2-stellige logische Operationen	**Bedeutung**	**Funktor**	**1.Operand p:** **2.Operand q:**	**W W F F** **W F W F**
Konjunktion	"sowohl ... als auch ..."	AND	$p \wedge q$	**W F F F**
Disjunktion	"... oder ... oder beides"	OR	$p \vee q$	**W W W F**
Implikation	"aus ... folgt ..."	SEQ	$p \rightarrow q$	**W F W W**
Äquivalenz	"... genau dann wenn ..."	EQ	$p \leftrightarrow q$	**W F F W**
Antivalenz	"entweder ... oder ..."	XOR	$p \succ\!\!-\!\!\prec q$	**F W W F**
Sheffersche Relation	"nicht gleichzeitig ... und ..."	NAND	$p \uparrow q$	**F W W W**
Peircesche Relation	"weder ... noch ..."	NOR	$p \downarrow q$	**F F F W**

Der Wahrheitswert aussagenlogischer Ausdrücke hängt von der Wahrheitswertzuordnung an die enthaltenen Variablen ab. Er kann mittels einer **Wahrheitswerttabelle** bestimmt werden.
An die Stelle von Variablen können auch Konstanten treten.

Bsp.: $p \wedge \mathbf{W} = p$, $p \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$, $p \vee \mathbf{W} = \mathbf{W}$, $p \vee \mathbf{F} = p$.

Eine **Kontradiktion** ist ein aussagenlogischer Ausdruck, der stets den Wahrheitswert **F** besitzt.

$p \wedge \overline{p}$ (ausgeschlossener Widerspruch)

$p \leftrightarrow \overline{p}$, $p \succ\!\!-\!\!\prec p$ (Widersprüche)

Eine **Tautologie** ist ein aussagenlogischer Ausdruck, der stets den Wahrheitswert **W** besitzt.

$p \vee \overline{p}$ (ausgeschlossenes Drittes)

$p \leftrightarrow p$, $(p \vee p) \leftrightarrow p$, $(p \wedge p) \leftrightarrow p$ (Vereinfachungen)

$\overline{\overline{p}} \leftrightarrow p$, $(p \uparrow p) \leftrightarrow \overline{p}$, $(p \downarrow p) \leftrightarrow \overline{p}$ (doppelte Verneinung, Negationsumformung)

$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$, $\overline{p \vee q} \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ (Gesetze von De Morgan)

$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ (Kommutativgesetze)

$(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$, $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ (Assoziativgesetze)

$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributivitätsgesetz 1)

$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributivitätsgesetz 2)

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}$ (Umformungen einer Implikation)

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ (Umformungen einer Äquivalenz)

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}))$ (Umformungen einer Äquivalenz)

$(p \succ\!\!-\!\!\prec q) \leftrightarrow ((p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q))$ (Umformungen einer Antivalenz)

$(p \succ\!\!-\!\!\prec q) \leftrightarrow \overline{p \leftrightarrow q}$ (Umformungen einer Antivalenz)

$(p \uparrow q) \leftrightarrow \overline{p \wedge q}$, $(p \uparrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ (Umformungen einer Shefferschen Relation)

$(p \downarrow q) \leftrightarrow \overline{p \vee q}$, $(p \downarrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ (Umformungen einer Peirceschen Relation)

Aussagenlogische Tautologien werden zur Umformung und zur Vereinfachung genutzt. Es gilt:

(Tautologie) $\leftrightarrow \mathbf{W}$, (Kontradiktion) $\leftrightarrow \mathbf{F}$.