Mengenlehre

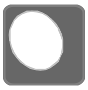
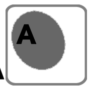
Definition einer Menge:

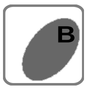
Eine Menge ist eine wohldefinierte Gesamtheit von Elementen.
Für jedes Elemente x der Grundgesamtheit $\mathbf{\Omega}$ kann entschieden werden, ob es zu einer Menge **M** gehört oder nicht:

- $x \in \mathbf{M}$ — x ist Element der Menge **M** , — x gehört zu **M**
- $x \notin \mathbf{M}$ — x ist nicht Element der Menge **M** , — x gehört nicht zu **M**

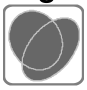
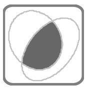
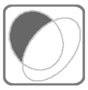
Mengenvergleich, Mengenordnung: (Mengen A, B)

- $\mathbf{A} = \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; \forall x : (x \in \mathbf{A} \leftrightarrow x \in \mathbf{B})$ — Mengengleichheit
- $\mathbf{A} \neq \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; \exists x : ((x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B}) \vee (x \in \mathbf{B} \wedge x \notin \mathbf{A}))$ — Mengenungleichheit
- $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; \forall x : (x \in \mathbf{A} \rightarrow x \in \mathbf{B})$ — **A** ist Teilmenge von **B**
- $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \wedge \exists x : (x \notin \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B})$ — **A** echte Teilmenge von **B**
- $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ — **A** ist Obermenge von **B**
- $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ — **A** echte Obermenge von **B**

Mengenoperationen:  **(Mengen A** 

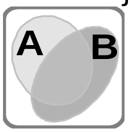
, B 

)

- $\overline{\mathbf{A}} = \{ x \mid x \notin \mathbf{A} \}$ — Komplementärmenge zu **A** 
- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{ x \mid x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B} \}$ — Mengenvereinigung 
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{ x \mid x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B} \}$ — Mengendurchschnitt 
- $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{ x \mid x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B} \} = \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}$ — Mengendifferenz 
- $\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})$ — symmetr. Mengendifferenz

Darstellung von Mengen:

- $\mathbf{A} = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ — Auflistung aller Elemente — Bsp.: $\mathbf{A} = \{ 2, 3, 5, 7\}$
- $\mathbf{A} = \{ x_1, x_2, x_3, ...\}$ — Auflistung der ersten Elemente — Bsp.: $\mathbf{A} = \{ 3, 6, 9, 12, ...\}$
- $\mathbf{A} = \{ x \mid x = f(n)\}$ — formelhafte Beschreibung — Bsp.: $\mathbf{A} = \{ x \mid x = 2\,n + 1\}$
- $\mathbf{A} = \{ x \mid \mathrm{P}(x)\}$ — prädikative Beschreibung — Bsp.: "zweistell. Primzahlen"
- abgeschlossene/offene Intervalle auf Zahlengerade — Bsp.: $\mathbf{[}2; 5\mathbf{)} = \{ x \mid 2 \leq x < 5\}$
- Darstellung als Teilmengen der Zahlengerade, Zahlenebene etc.
- abstrakte Darstellung als Teilmengen im VENN-Diagramm



Mächtigkeit und Endlichkeit von Mengen:

- $|\mathbf{A}|$ Mächtigkeit der Menge **A** (bei endlichen Mengen: Elementeanzahl)
- leere Menge $\mathbf{A} = \varnothing$: — $|\mathbf{A}| = 0$:
- endliche Menge **A** : — $|\mathbf{A}| = n < \propto$
- abzählbar unendliche Menge **A** : — $|\mathbf{A}| = \propto$, Elemente nummerierbar
- überabzählbare unendliche Menge **A** : — $|\mathbf{A}|$?> $\propto$, Elemente nicht nummerierbar

Gesetze: (Mengen A, B, C)

- $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ — $\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A}$ — $\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing$ — $\mathbf{A} \cup \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}$ — $\mathbf{A} \cap \mathbf{\Omega} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$ — $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$ — Kommutativität
- $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$ — $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$ — Assoziativität
- $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$ — $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$ — Distributivität
- $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B})$ — $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A})$ — Gesetzmäßigkeiten bei Teilmengen
- $| \mathbf{A} \cap \mathbf{B} | \leq | \mathbf{A} | \leq | \mathbf{A} \cup \mathbf{B} |$ — $1 \leq | \mathbf{K}(\mathbf{A}) | \leq | \mathbf{A} |$ — $| \mathbf{P}(\mathbf{A}) | = 2^{|\mathbf{A}|}$ — und Mächtigkeiten

Mengenüberdeckungen, Klasseneinteilungen, Potenzmenge:

- Zwei Mengen **A** und **B** heißen <u>disjunkt</u>, wenn $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$.
- Mengen $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_m$ heißen eine <u>Überdeckung von **M**</u>, wenn $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup ... \cup \mathbf{A}_m$
- Sind die Mengen $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_m$ paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen von **M**, so bilden sie eine <u>Klasseneinteilung von **M**</u>, geschrieben: $\mathbf{K}(\mathbf{M}) = \{ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_m \}$.
- Die Menge <u>aller</u> Teilmengen von **M** heißt <u>Potenzmenge von **M**</u>, geschrieben $\mathbf{P}(\mathbf{M})$.

Mengensysteme sind Mengen von Mengen, also Mengen höherer Stufe. Somit sind Klasseneinteilungen und Potenzmenge einer Menge 1.Stufe selbst Mengen 2.Stufe.