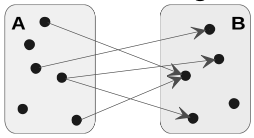
Abbildungen (als Relationen)

Abbildung (Definition):

Eine Abbildung φ stellt eine Beziehung zwischen Objekten (Urbild, Quellelement) und Bildern von ihnen (Bild, Abbild, Zielelement) her. Eine Abbildung ist damit eine binäre Relation zwischen Elementen a aus der Urbildmenge **A** und Elementen b der Bildmenge **B**.

φ:	$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$	Abbildung zwischen Mengen
φ:	$\mathbf{A} \ni a \;\to b \in \mathbf{B}$	Abbildung zwischen Elementen
	$b = \varphi(a)$	Abbildung in funktioneller Form

φ:

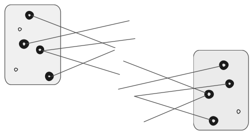


Definitionsbereich einer Abbildung:

$D_\varphi = \{\, a \in \mathbf{A} \mid \exists\, b \in \mathbf{B} \;\wedge\; b = \varphi(a)\} \subseteq \mathbf{A}$ Menge der Urbilder

Wertebereich einer Abbildung:

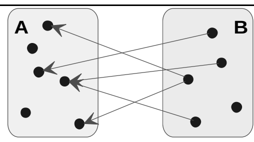
$W_\varphi = \{\, b \in \mathbf{B} \mid \exists\, a \in \mathbf{A} \;\wedge\; b = \varphi(a)\} \subseteq \mathbf{B}$ Menge der Bilder



Eine Abbildung ψ: $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{A}$ heißt

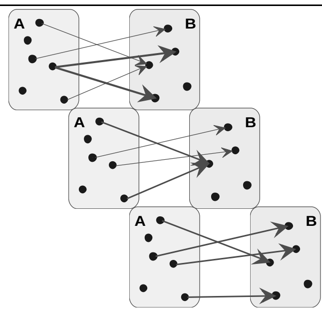
- Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ zu φ: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$,
  wenn $(\forall\, a \in \mathbf{A} \wedge \forall\, b \in \mathbf{B})$: $a = \psi(b) \leftrightarrow b = \varphi(a)$

ψ:



Eine Abbildung φ: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ heißt

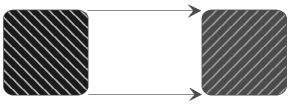
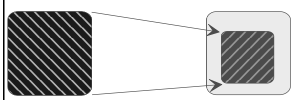
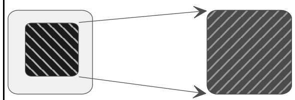
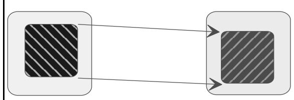
- mehrdeutig,
  wenn $(\exists\, a \in \mathbf{A} \wedge \exists\, b_1 = \varphi(a) \in \mathbf{B} \wedge \exists\, b_2 = \varphi(a) \in \mathbf{B})$: $b_1 \neq b_2$
- eindeutig,
  wenn $(\forall\, a \in \mathbf{A} \wedge \forall\, b_1 = \varphi(a) \in \mathbf{B})$: $\neg\exists\, b_2 \neq b_1 \wedge b_2 = \varphi(a) \in \mathbf{B}$
- eineindeutig,
  wenn sowohl φ als auch $\psi = \varphi^{-1}$ eindeutig sind.



Eine Abbildung φ: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ heißt

- Abbildung von **A**, wenn $D_\varphi = \mathbf{A}$
- Abbildung (echt) aus **A**, wenn $D_\varphi \subset \mathbf{A}$
- Abbildung auf **B**, wenn $W_\varphi = \mathbf{B}$
- Abbildung (echt) in **B**, wenn $W_\varphi \subset \mathbf{B}$

Darstellung einer Abbildung φ: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ mittels VENN-Diagramm im Falle der

Abbildung von **A** auf **B**	Abbildung von **A** in **B**	Abbildung aus **A** auf **B**	Abbildung aus **A** in **B**
			

Andere Bezeichnungen:

Eine Abbildung von **A** auf **B** heißt surjektiv.
Eine eineindeutige Abbildung von **A** und heißt injektiv.
Eine injektive und surjektive Abbildung (also eineindeutig von **A** auf **B**) heißt bijektiv.

Eine Abbildung heißt partiell, wenn sie eine Abbildung aus **A** ist.

Morphismen:

Eine strukturerhaltende Abbildung φ: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ heißt

- homomorph (Homomorphismus), wenn sie eindeutig von **A** auf oder in **B** abbildet,
- endomorph (Endomorphismus), wenn sie eindeutig von **A** auf oder in **A** abbildet,
- isomorph (Isomorphismus), wenn sie eineindeutig von **A** auf oder in **B** abbildet,
- automorph (Automorphismus), wenn sie eineindeutig von **A** auf **A** abbildet.

Die erhaltene (Ordnungs-, algebraische, topologische, ...) Struktur wird mit angegeben (Ordnungsisomorphismus, Gruppenisomorphismus, Umgebungshomom., ...).

Zur Beachtung: Abbildungen werden oftmals als eindeutig vorausgesetzt, auch wenn dies nicht extra angegeben ist.