Relationen (allgemein)

Definition einer *n*-stelligen Relation:

Stehen n Elemente einer Menge **M** in einer gewissen Beziehung zueinander, so genügen sie einer n-stelligen Relation $\boldsymbol{R}$, geschrieben in der

⊙ Präfixform $\boldsymbol{R}(x_1, x_2, ..., x_n)$, z.B.: pyt3$(x, y, z)$ ... "$x^2 + y^2 = z^2$"

Die Relation $\boldsymbol{R}$ entspricht der Menge der ihr genügenden n-Tupel, ist Teilmenge von $\mathbf{M}^n$:

$$\boldsymbol{R} \subseteq \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{...} \times \mathbf{M} = \mathbf{M}^n.$$

Einer n-stelligen Relation $\boldsymbol{R}$ ist ein prädikatenlog. Ausdruck $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ zuordenbar:

$$\boldsymbol{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{M}^n \mid \mathbf{w}(R(x_1, x_2, ..., x_n)) = \mathbf{W}\}.$$

Eine n-stelligen Relation $\boldsymbol{R}$ kann dargestellt werden durch

- die Menge der ihr genügenden n-Tupel (Auflistung),
- eine Relationstabelle (mit n Spalten für die Elemente x_i und eine Spalte mit **+** oder **-**),
- eine Relationsgrafik (Verbindung von der Relation $\boldsymbol{R}$ genügenden Elementen).

Eine 2-stellige Relation heißt **binäre Relation**, welche geschrieben werden kann in der

⊙ Präfixform	$\boldsymbol{R}\,(x, y)$,	z.B.:	$\leq(x, y)$	$\neq(x, y)$	der **Vater** von Inge ist Paul
⊙ Infixform	$x\,\boldsymbol{R}\,y$,	z.B.:	$x \leq y$	$x \neq y$	von Inge der **Vater** ist Paul
⊙ Postfixform	$(x, y)\,\boldsymbol{R}$,	z.B.:	$(x, y)\leq$	$(x, y)\neq$	von Inge ist Paul der **Vater**

Eine binäre Relation $\boldsymbol{R}$ kann dargestellt werden (neben obigen Möglichkeiten) durch

- eine Relationstafel (Eing.spalte für x, Kopfzeile für y, im quadratischen Feld **+** oder **-**),
- ein Relationsdiagramm (links x, rechts y, Verbindung, wenn $x\,\boldsymbol{R}\,y$ gilt),
- einen Relationsgrafen (gerichtete Verbindung (Pfeil) von x nach y, wenn $x\,\boldsymbol{R}\,y$ gilt).

Eigenschaften von Relationen, Bezeichnungen:

Eine binäre Relation $\boldsymbol{R} \subseteq \mathbf{M}^2$. heißt:

- **reflexiv**, falls $\forall x: \; x R x$
- **irreflexiv**, falls $\forall x: \; \neg x R x$

  } auch möglich: keins von beiden

- rechtseindeutig, falls $\forall x: \; x R y \wedge x R z \;\rightarrow\; y = z$
- linkseindeutig, falls $\forall x: \; x R z \wedge y R z \;\rightarrow\; x = y$

  } wenn beides: eineindeutig

- projektiv, falls $\forall x: \; x R y \wedge x R z \;\rightarrow\; y = z \;\wedge\; y R y$
- linkstotal, falls $\forall x\; \exists y: \; x R y$
- rechtstotal, falls $\forall x\; \exists y: \; y R x$

  } wenn beides: bitotal

- **symmetrisch**, falls $\forall x\; \forall y: \; x R y \;\rightarrow\; y R x$
- **antisymmetrisch**, falls $\forall x\; \forall y: \; x R y \wedge y R x \;\rightarrow\; x = y$ - auch: identitiv
- **asymmetrisch**, falls $\forall x\; \forall y: \; x R y \;\rightarrow\; \neg y R x$ - ist antisymm., irrefl.
- linear, falls $\forall x\; \forall y: \; x R y \vee y R x$ - ist reflexiv, konnex
- **konnex**, falls $\forall x\; \forall y: \; x R y \vee y R x \vee x = y$
- trichotom, falls konnex, aber genau 1 der 3 möglichen Fälle tritt ein
- **transitiv**, falls $\forall x\, \forall y\, \forall z: \; x R y \wedge y R z \;\rightarrow\; x R z$
- drittengleich, falls $\forall x\, \forall y\, \forall z: \; x R z \wedge y R z \;\rightarrow\; x R y$

Eine n-stellige Relation $\boldsymbol{R}$ heißt:

- eindeutig in Position k, falls $\forall(x_1,..,x_{k-1},\_,x_{k+1},..,x_n):$
  $R(x_1,..,x_{k-1},y,x_{k+1},..,x_n) \wedge R(x_1,..,x_{k-1},z,x_{k+1},..,x_n) \rightarrow y = z$

  } k=1: linkseind. k=n: rechtseind.

- total in Posit. k, falls $\forall y \in \mathbf{M}\;\; \exists(x_1,..,x_{k-1},\_,x_{k+1},..,x_n): \;\; R(x_1,..,x_{k-1},y,x_{k+1},..,x_n)$
- symmetrisch in Positionen j und k, falls
  $R(..,x_j,..,x_k,..) \rightarrow R(..,y_j,..,y_k,..)$ mit $y_j = x_k, y_k = x_j$

  } für beliebige j und k: symmetrisch

Der Erreichbarkeitsbereich X_k in der Position k:

$$X_k = \{\, y \in \mathbf{M} \mid \exists(x_1,..,x_{k-1},\_,x_{k+1},..,x_n): R(x_1,..,x_{k-1},y,x_{k+1},..,x_n)\,\}$$

Damit gilt: $\boldsymbol{R} \subseteq X_1 \times X_2 \times \mathbf{...} \times X_n \subseteq \mathbf{M}^{\boldsymbol{n}}$.

Bezeichnungen: n=1: unäre Relation, n=2: binäre Relation n=3: ternäre Relation