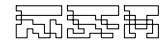


# Operationen (binäre und $n$ -stellige)



## Definition einer $n$ -stelligen Operation:

Wird  $n$  Elementen einer Menge  $\mathbf{M}$  nach einer Vorschrift  $F$  in eindeutiger Weise ein Element dieser Menge  $\mathbf{M}$  zugewiesen, so stellt dies eine  $n$ -stellige Operation  $F$  dar in der

- ⊙ Präfixform  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , z.B.: Summe( $x, y, z$ ) ... " $x + y + z$ "

Eine Operation  $F$  ist demzufolge eine eindeutige Abbildung von  $\mathbf{M}^n$  in oder auf  $\mathbf{M}$  und entspricht einer rechtseindeutigen  $(n+1)$ -stelligen Relation  $R \subseteq \mathbf{M}^{n+1}$ .

Eine  $n$ -stelligen Operation  $F$  kann dargestellt werden durch

- eine Operationstabelle ( $n$  Spalten für die Elemente  $x_j$ , eine Spalte für das Ergebnis  $z$ ),
- analytisch (Berechnungsvorschrift) oder verbal.

Eine 2-stellige Operation heißt **binäre Operation**, welche geschrieben werden kann in der

- ⊙ Präfixform  $F(x, y)$ , z.B.:  $+(x, y)$  **ggT**( $x, y$ ) **ggT** von  $x$  und  $y$
- ⊙ Infixform  $x F y$ , z.B.:  $x + y$   $x$  **ggT**  $y$  **x plus y**
- ⊙ Postfixform  $(x, y) F$ , z.B.:  $(x, y)+$   $(x, y)$ **ggT** von  $x$  und  $y$  der **ggT**

Eine binäre Operation  $F$  kann dargestellt werden (neben obigen Möglichkeiten) durch

- eine Operationstafel (Eing.spalte für  $x$ , Kopfzeile für  $y$ , im quadrat. Feld das Ergebnis),
- ein Nomogramm (links  $x$ -Skala, rechts  $y$ -Skala, in der Mitte Ergebnisskala).

## Eigenschaften binärer Operationen :

Eine binäre Operation  $\oplus$  heißt:

- **idempotent**, falls  $\forall x: x \oplus x = x$
  - **kommutativ**, falls  $\forall x \forall y: x \oplus y = y \oplus x$
  - **antikommutativ**, falls  $\forall x \forall y: x \oplus y = -y \oplus x$
  - **assoziativ**, falls  $\forall x \forall y \forall z: (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
  - linkskürzbar, falls  $\forall x: x \oplus y = x \oplus z \rightarrow y = z$
  - rechtskürzbar, falls  $\forall x: x \oplus z = y \oplus z \rightarrow x = y$
- } Kürzungsregel ist erfüllt

Zwei binäre Operationen  $\oplus$  und  $\otimes$  sind

- **adjunktiv**, falls  $\forall x \forall y: x \otimes (x \oplus y) = x$  *wenn kommutativ*
- linksadjunktiv, falls  $\forall x \forall y: x \otimes (x \oplus y) = x$  *sonst*
- rechtsadjunktiv, falls  $\forall x \forall y: (x \oplus y) \otimes y = y$  *sonst*
- **distributiv**, falls  $\forall x \forall y \forall z: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$  *wenn kommutativ*
- linksdistributiv, falls  $\forall x \forall y \forall z: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$  *sonst*
- rechtsdistributiv, falls  $\forall x \forall y \forall z: (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$  *sonst*

**Neutrales Element:** Ein Element  $e$  heißt bezüglich der Operation  $\oplus$

- **neutral**, falls  $\forall x: x \oplus e = x$  *wenn kommutativ*
- linksneutral, falls  $\forall x: e \oplus x = x$  *sonst*
- rechtsneutral, falls  $\forall x: x \oplus e = x$  *sonst*

**Zwangselement:** Ein Element  $n$  heißt bezüglich der Operation  $\oplus$

- **zwingend**, falls  $\forall x: x \oplus n = n$  *wenn kommutativ*
- linkszwingend, falls  $\forall x: n \oplus x = n$  *sonst*
- rechtszwingend, falls  $\forall x: x \oplus n = n$  *sonst*

Existiert ein neutrales Element  $e$ , so heißt

- ein Element  $i$  eine **Einheit**, falls  $i \oplus i = e$  auch: **selbstinvers**
- das Element  $y$  **invers** zu  $x$ , falls  $x \oplus y = e$  *wenn kommutativ*
- linksinvers zu  $x$ , falls  $y \oplus x = e$  *sonst*
- rechtsinvers zu  $x$ , falls  $x \oplus y = e$  *sonst*

Multiplikative Struktur:	neutral: Einselement,	invers: reziproke Zahl,	zwingend: Nullelement
Additive Struktur:	neutral: Nullelement,	invers: Gegenzahl,	zwingend: -