Operationen (binäre und *n*-stellige)

Definition einer *n*-stelligen Operation:

Wird n Elementen einer Menge **M** nach einer Vorschrift $\boldsymbol{F}$ in eindeutiger Weise ein Element dieser Menge **M** zugewiesen, so stellt dies eine n-stellige Operation $\boldsymbol{F}$ dar in der

⊙ Präfixform $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, ..., x_n)$, z.B.: Summe$(x, y, z)$ ... "$x + y + z$"

Eine Operation $\boldsymbol{F}$ ist demzufolge eine eindeutige Abbildung von $\mathbf{M}^{n}$ in oder auf **M** und entspricht einer rechtseindeutigen $(n+1)$-stelligen Relation $\boldsymbol{R} \subseteq \mathbf{M}^{n+1}$.

Eine n-stelligen Operation $\boldsymbol{F}$ kann dargestellt werden durch

- eine Operationstabelle (n Spalten für die Elemente x_i , eine Spalte für das Ergebnis z),
- analytisch (Berechnungsvorschrift) oder verbal.

Eine 2-stellige Operation heißt **binäre Operation**, welche geschrieben werden kann in der

⊙ Präfixform	$\boldsymbol{F}(x, y)$,	z.B.:	$\mathbf{+}(x, y)$	$\mathbf{ggT}(x, y)$	**ggT** von x und y
⊙ Infixform	$x\ \boldsymbol{F}\ y$,	z.B.:	$x \mathbf{+} y$	$x\ \mathbf{ggT}\ y$	x **plus** y
⊙ Postfixform	$(x, y)\ \boldsymbol{F}$,	z.B.:	$(x, y)\mathbf{+}$	$(x, y)\mathbf{ggT}$	von x und y der **ggT**

Eine binäre Operation $\boldsymbol{F}$ kann dargestellt werden (neben obigen Möglichkeiten) durch

- eine Operationstafel (Eing.spalte für x, Kopfzeile für y, im quadrat. Feld das Ergebnis),
- ein Nomogramm (links x-Skala, rechts y-Skala, in der Mitte Ergebnisskala).

Eigenschaften binärer Operationen :

Eine binäre Operation ⊕ heißt:

- **idempotent**, falls $\forall x:\quad x \oplus x = x$
- **kommutativ**, falls $\forall x\ \forall y:\quad x \oplus y = y \oplus x$
- antikommutativ, falls $\forall x\ \forall y:\quad x \oplus y = -\,y \oplus x$
- **assoziativ**, falls $\forall x\ \forall y\ \forall z:\quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
- linkskürzbar, falls $\forall x:\quad x \oplus y = x \oplus z \rightarrow y = z$
- rechtskürzbar, falls $\forall x:\quad x \oplus z = y \oplus z \rightarrow x = y$

$\Big\}$ Kürzungsregel ist erfüllt

Zwei binäre Operationen ⊕ und ⊗ sind

- **adjunktiv**, falls $\forall x\ \forall y:\quad x \otimes (x \oplus y) = x$ — *wenn kommutativ*
- linksadjunktiv, falls $\forall x\ \forall y:\quad x \otimes (x \oplus y) = x$ — *sonst*
- rechtsadjunktiv, falls $\forall x\ \forall y:\quad (x \oplus y) \otimes y = y$ — *sonst*
- **distributiv**, falls $\forall x\ \forall y\ \forall z:\quad x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ — *wenn kommutativ*
- linksdistributiv, falls $\forall x\ \forall y\ \forall z:\quad x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ — *sonst*
- rechtsdistributiv, falls $\forall x\ \forall y\ \forall z:\quad (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$ — *sonst*

Neutrales Element: Ein Element **e** heißt bezüglich der Operation ⊕

- **neutral**, falls $\forall x:\quad x \oplus \mathbf{e} = x$ — *wenn kommutativ*
- linksneutral, falls $\forall x:\quad \mathbf{e} \oplus x = x$ — *sonst*
- rechtsneutral, falls $\forall x:\quad x \oplus \mathbf{e} = x$ — *sonst*

Zwangselement: Ein Element **n** heißt bezüglich der Operation ⊕

- **zwingend**, falls $\forall x:\quad x \oplus \mathbf{n} = \mathbf{n}$ — *wenn kommutativ*
- linkszwingend, falls $\forall x:\quad \mathbf{n} \oplus x = \mathbf{n}$ — *sonst*
- rechtszwingend, falls $\forall x:\quad x \oplus \mathbf{n} = \mathbf{n}$ — *sonst*

Existiert ein neutrales Element **e**, so heißt

- ein Element **i** eine **Einheit**, falls $\mathbf{i} \oplus \mathbf{i} = \mathbf{e}$ — auch: **selbstinvers**
- das Element y **invers** zu x, falls $x \oplus y = \mathbf{e}$ — *wenn kommutativ*
- linksinvers zu x, falls $y \oplus x = \mathbf{e}$ — *sonst*
- rechtsinvers zu x, falls $x \oplus y = \mathbf{e}$ — *sonst*

Multiplikative Struktur:	neutral: Einselement,	invers: reziproke Zahl,	zwingend: Nullelement
Additive Struktur:	neutral: Nullelement,	invers: Gegenzahl,	zwingend: -