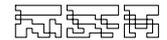


Operationen (binäre und n -stellige)



Definition einer n -stelligen Operation:

Wird n Elementen einer Menge \mathbf{M} nach einer Vorschrift F in eindeutiger Weise ein Element dieser Menge \mathbf{M} zugewiesen, so stellt dies eine n -stellige Operation F dar in der

⊙ Präfixform $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, z.B.: Summe(x, y, z) ... " $x + y + z$ "

Eine Operation F ist demzufolge eine eindeutige Abbildung von \mathbf{M}^n in oder auf \mathbf{M} und entspricht einer rechtseindeutigen $(n+1)$ -stelligen Relation $R \subseteq \mathbf{M}^{n+1}$.

Eine n -stelligen Operation F kann dargestellt werden durch

- eine Operationstabelle (n Spalten für die Elemente x_j , eine Spalte für das Ergebnis z),
- analytisch (Berechnungsvorschrift) oder verbal.

Eine 2-stellige Operation heißt **binäre Operation**, welche geschrieben werden kann in der

⊙ Präfixform $F(x, y)$, z.B.: $+(x, y)$ **ggT**(x, y) **ggT** von x und y

⊙ Infixform $x F y$, z.B.: $x + y$ x **ggT** y x **plus** y

⊙ Postfixform $(x, y) F$, z.B.: $(x, y)+$ (x, y) **ggT** von x und y der **ggT**

Eine binäre Operation F kann dargestellt werden (neben obigen Möglichkeiten) durch

- eine Operationstafel (Eing.spalte für x , Kopfzeile für y , im quadrat. Feld das Ergebnis),
- ein Nomogramm (links x -Skala, rechts y -Skala, in der Mitte Ergebnisskala).

Eigenschaften binärer Operationen :

Eine binäre Operation \oplus heißt:

- **idempotent**, falls $\forall x: x \oplus x = x$
 - **kommutativ**, falls $\forall x \forall y: x \oplus y = y \oplus x$
 - **antikommutativ**, falls $\forall x \forall y: x \oplus y = -y \oplus x$
 - **assoziativ**, falls $\forall x \forall y \forall z: (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
 - linkskürzbar, falls $\forall x: x \oplus y = x \oplus z \rightarrow y = z$
 - rechtskürzbar, falls $\forall x: x \oplus z = y \oplus z \rightarrow x = y$
- } Kürzungsregel ist erfüllt

Zwei binäre Operationen \oplus und \otimes sind

- **adjunktiv**, falls $\forall x \forall y: x \otimes (x \oplus y) = x$ *wenn kommutativ*
- linksadjunktiv, falls $\forall x \forall y: x \otimes (x \oplus y) = x$ *sonst*
- rechtsadjunktiv, falls $\forall x \forall y: (x \oplus y) \otimes y = y$ *sonst*
- **distributiv**, falls $\forall x \forall y \forall z: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ *wenn kommutativ*
- linksdistributiv, falls $\forall x \forall y \forall z: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ *sonst*
- rechtsdistributiv, falls $\forall x \forall y \forall z: (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$ *sonst*

Neutrales Element: Ein Element e heißt bezüglich der Operation \oplus

- **neutral**, falls $\forall x: x \oplus e = x$ *wenn kommutativ*
- linksneutral, falls $\forall x: e \oplus x = x$ *sonst*
- rechtsneutral, falls $\forall x: x \oplus e = x$ *sonst*

Zwangselement: Ein Element n heißt bezüglich der Operation \oplus

- **zwingend**, falls $\forall x: x \oplus n = n$ *wenn kommutativ*
- linkszwingend, falls $\forall x: n \oplus x = n$ *sonst*
- rechtszwingend, falls $\forall x: x \oplus n = n$ *sonst*

Existiert ein neutrales Element e , so heißt

- ein Element i eine **Einheit**, falls $i \oplus i = e$ auch: **selbstinvers**
- das Element y **invers** zu x , falls $x \oplus y = e$ *wenn kommutativ*
- linksinvers zu x , falls $y \oplus x = e$ *sonst*
- rechtsinvers zu x , falls $x \oplus y = e$ *sonst*

Multiplikative Struktur:	neutral: Einselement,	invers: reziproke Zahl,	zwingend: Nullelement
Additive Struktur:	neutral: Nullelement,	invers: Gegenzahl,	zwingend: -