Ordnungsstrukturen

Eine Ordnungsstruktur **(M, $\circledR$)** wird gebildet aus einer Menge **M** und einer auf dieser definierten binären Relation $\circledR$, welche zumindest antisymmetrisch und transitiv ist.

(M, $\circledR$) heißt (bzw.: die Ordnungsrelation $\circledR$ induziert auf der Menge **M** eine ...)

- ⊙ (reflexive oder schwache) Halbordnung, wenn $\circledR$ auch reflexiv auf **M** ist,
- ⊙ (irreflexive oder) strenge Halbordnung, wenn $\circledR$ auch irreflexiv und asymmetrisch ist,
- ⊙ (allgemeine oder) anormale Halbordnung, wenn $\circledR$ weder reflexiv noch irreflexiv ist.

(M, $\circledR$) bildet sogar eine Ordnung, wenn $\circledR$ außerdem konnex ist, und zudem eine Wohlordnung, wenn jede nichtleere Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{M}$ ein kleinstes Element besitzt.
(M, $\circledR$) bildet nur eine Quasiordnung, wenn $\circledR$ nicht antisymmetrisch ist.
In einer Ordnungsstruktur **(M, $\circledR$)** oder **(M, ≤)** heißt ein Element $a \in \mathbf{M}$

- kleinstes Element, falls $\forall x \in \mathbf{M}$: $x \neq a \rightarrow a \leq x$ (alle anderen sind größer)
- größtes Element, falls $\forall x \in \mathbf{M}$: $x \neq a \rightarrow x \leq a$ (alle anderen sind kleiner)
- mimimal, falls $\neg\exists x \in \mathbf{M}$: $x \neq a \wedge x \leq a$ (es gibt kein kleineres Element)
- maximal, falls $\neg\exists x \in \mathbf{M}$: $x \neq a \wedge a \leq x$ (es gibt kein größeres Element)

Ein Element $a \in \mathbf{M}$ heißt (sofern ein solches Element existiert)

- untere Schranke einer Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{M}$, falls $\forall x \in \mathbf{T}$: $a \leq x$,
- obere Schranke einer Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{M}$, falls $\forall x \in \mathbf{T}$: $x \leq a$,
- untere Grenze einer Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{M}$, falls a größte untere Schranke von T ist,
- obere Grenze einer Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{M}$, falls a kleinste obere Schranke von T ist.

Ist $\mathbf{T} = \{a, b\}$, so heißt $a \sqcap b$ untere Grenze und $a \sqcup b$ obere Grenze der Elemente a und b ,
und weiter gilt: $a \leq b \rightarrow a \sqcap b = a$ und $a \leq b \rightarrow a \sqcup b = b$.
Zu einem Element a heißt ein Element b mit $a \neq b$ unmittelbarer Nachfolger, falls
$a \leq b \wedge \neg\exists x \in \mathbf{M}: x \neq a \wedge x \neq b \wedge a \leq x \wedge x \leq b$,
a heißt dann unmittelbarer Vorgänger von b , und a und b heißen benachbart.
Eine Halbordnung oder Ordnung wird mittels HASSE-Graf oder Ordnungsgraf als (von unten nach oben) orientierter Relationsgraf dargestellt, wobei nur benachbarte Elemente verbunden werden.

Ein Verband **(V, ⊓, ⊔)** entsteht aus einer Ordnungsstruktur **(V, ≤)**, falls
$\forall a \in \mathbf{V}\ \forall b \in \mathbf{V} : a \sqcap b \in \mathbf{V}$ und $a \sqcup b \in \mathbf{V}$.
Die binären Operationen ⊓ und ⊔ sind idempotent, kommutativ, assoziativ, adjunktiv.
Ein existierendes kleinstes Element von **V** heißt Nullelement **n** ,
ein existierendes größtes Element von **V** heißt Einselement **e** .
Ein Element heißt Atom, wenn es zum Nullelement **n** benachbart ist.

- Ein Verband heißt distributiv, falls ⊓ und ⊔ auch distributiv sind.
- Ein Verband mit Nullelement und Einselement heißt komplementär, falls
  $\forall a \in \mathbf{M}\ \exists b = \bar{a} \in \mathbf{M} :\ \bar{a} \sqcap a = \mathbf{n} \ \wedge\ \bar{a} \sqcup a = \mathbf{e}$.
- Ein komplementärer und distributiver Verband heißt BOOLEscher Verband.

Eine Ordnungsstruktur **(M, ≥)** heißt dual zu **(M, ≤)**, wenn $\forall a \in \mathbf{M}\ \forall b \in \mathbf{M} :\ a \geq b \leftrightarrow b \leq a$.
Ein Verband **(V, ⊔, ⊓)** ist dual zu **(V, ⊓, ⊔)** .

	(V, ≤)	**(V, ⊓, ⊔)**		spez.Elem.		?
Spezielle Ordnungsstrukturen und (gegebenenfalls) Verbände:	≤	⊓	⊔	**n**	**e**	V.
V= $\mathfrak{S}$(**M**) als System von Teilmengen von **M**, Mengenverband	⊆	∩	∪			d
V= $\mathfrak{P}$(**M**) als Potenzmenge von **M**, Potenzmengenverband	⊆	∩	∪	∅	**M**	B
V= **M** als Teilmenge reeller Zahlen $\mathbb{R}$	≤	min	max			d
V= **M** als Menge von Punkten des $\mathbb{R}^k$, *komponentenweise:*	*≼	*min	*max			d
V= $\mathbf{B}^k$ als Menge aller k-stelligen Binärvektoren, *komp.w.:*	*≼	*min	*max	00..0	11..1	B
V= **M** als Teilmenge natürlicher Zahlen $\mathbb{N}$	|	ggT	kgV			d
V= $\mathfrak{T}(a)$ als Menge der Teiler der Zahl a, Teilerverband	|	ggT	kgV	1	a	d
V= **M** als Menge von Aussagen, Aussagenverband	←	∧	∨			d

Eine Abbildung φ: $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ zwischen zwei Ordnungsstrukturen **(A, ⩽)** und **(B, ≼)** heißt

- **isoton** oder ordnungstreu, falls $\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}$: $a_1 \leqslant a_2 \rightarrow \varphi(a_1) \preccurlyeq \varphi(a_2)$,
- **ähnlich**, falls φ bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} isoton sind.

BOOLEsche Verbände sind genau dann ähnlich, wenn sie gleichviel Atome besitzen.