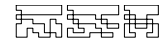


Ordnungsstrukturen



Eine Ordnungsstruktur (M, \mathcal{R}) wird gebildet aus einer Menge M und einer auf dieser definierten binären Relation \mathcal{R} , welche zumindest antisymmetrisch und transitiv ist.

(M, \mathcal{R}) heißt (bzw.: die Ordnungsrelation \mathcal{R} induziert auf der Menge M eine ...)

- ⊙ (reflexive oder schwache) Halbordnung, wenn \mathcal{R} auch reflexiv auf M ist,
- ⊙ (irreflexive oder) strenge Halbordnung, wenn \mathcal{R} auch irreflexiv und asymmetrisch ist,
- ⊙ (allgemeine oder) anormale Halbordnung, wenn \mathcal{R} weder reflexiv noch irreflexiv ist.

(M, \mathcal{R}) bildet sogar eine Ordnung, wenn \mathcal{R} außerdem konnex ist, und zudem eine Wohlordnung, wenn jede nichtleere Teilmenge $T \subseteq M$ ein kleinstes Element besitzt.

(M, \mathcal{R}) bildet nur eine Quasiordnung, wenn \mathcal{R} nicht antisymmetrisch ist.

In einer Ordnungsstruktur (M, \mathcal{R}) oder (M, \leq) heißt ein Element $a \in M$

- kleinstes Element, falls $\forall x \in M: x \neq a \rightarrow a \leq x$ (alle anderen sind größer)
- größtes Element, falls $\forall x \in M: x \neq a \rightarrow x \leq a$ (alle anderen sind kleiner)
- mimal, falls $\neg \exists x \in M: x \neq a \wedge x \leq a$ (es gibt kein kleineres Element)
- maximal, falls $\neg \exists x \in M: x \neq a \wedge a \leq x$ (es gibt kein größeres Element)

Ein Element $a \in M$ heißt (sofern ein solches Element existiert)

- untere Schranke einer Teilmenge $T \subseteq M$, falls $\forall x \in T: a \leq x$,
 - obere Schranke einer Teilmenge $T \subseteq M$, falls $\forall x \in T: x \leq a$,
 - untere Grenze einer Teilmenge $T \subseteq M$, falls a größte untere Schranke von T ist,
 - obere Grenze einer Teilmenge $T \subseteq M$, falls a kleinste obere Schranke von T ist.
- Ist $T = \{a, b\}$, so heißt $a \sqcap b$ untere Grenze und $a \sqcup b$ obere Grenze der Elemente a und b , und weiter gilt: $a \leq b \rightarrow a \sqcap b = a$ und $a \leq b \rightarrow a \sqcup b = b$.

Zu einem Element a heißt ein Element b mit $a \neq b$ unmittelbarer Nachfolger, falls

$$a \leq b \wedge \neg \exists x \in M: x \neq a \wedge x \neq b \wedge a \leq x \wedge x \leq b,$$

a heißt dann unmittelbarer Vorgänger von b , und a und b heißen benachbart.

Eine Halbordnung oder Ordnung wird mittels HASSE-Graph oder Ordnungsgraf als (von unten nach oben) orientierter Relationsgraf dargestellt, wobei nur benachbarte Elemente verbunden werden.

Ein Verband (V, \sqcap, \sqcup) entsteht aus einer Ordnungsstruktur (V, \leq) , falls

$$\forall a \in V \forall b \in V: a \sqcap b \in V \text{ und } a \sqcup b \in V.$$

Die binären Operationen \sqcap und \sqcup sind idempotent, kommutativ, assoziativ, adjunktiv.

Ein existierendes kleinstes Element von V heißt Nullelement n ,

ein existierendes größtes Element von V heißt Einselement e .

Ein Element heißt Atom, wenn es zum Nullelement n benachbart ist.

- Ein Verband heißt distributiv, falls \sqcap und \sqcup auch distributiv sind.
- Ein Verband mit Nullelement und Einselement heißt komplementär, falls

$$\forall a \in M \exists b \in M: \bar{a} \sqcap a = n \wedge \bar{a} \sqcup a = e.$$

- Ein komplementärer und distributiver Verband heißt BOOLEscher Verband.

Eine Ordnungsstruktur (M, \geq) heißt dual zu (M, \leq) , wenn $\forall a \in M \forall b \in M: a \geq b \leftrightarrow b \leq a$.

Ein Verband (V, \sqcup, \sqcap) ist dual zu (V, \sqcap, \sqcup) .

Spezielle Ordnungsstrukturen und (gegebenenfalls) Verbände:	(V, \leq)	(V, \sqcap, \sqcup)	spez. Elem.	?		
$V = \mathcal{G}(M)$ als System von Teilmengen von M , Mengenverband	\subseteq	\cap	\cup	n	e	V.
$V = \mathcal{P}(M)$ als Potenzmenge von M , Potenzmengenverband	\subseteq	\cap	\cup	\emptyset	M	B
$V = M$ als Teilmenge reeller Zahlen \mathbb{R}	\leq	min	max			d
$V = M$ als Menge von Punkten des \mathbb{R}^k , *komponentenweise:	\leq	*min	*max			d
$V = B^k$ als Menge aller k -stelligen Binärvektoren, *komp.w.:	\leq	*min	*max	00..0	11..1	B
$V = M$ als Teilmenge natürlicher Zahlen \mathbb{N}		ggT	kgV			d
$V = \mathcal{D}(a)$ als Menge der Teiler der Zahl a , Teilerverband		ggT	kgV	1	a	d
$V = M$ als Menge von Aussagen, Aussagenverband	\leftarrow	\wedge	\vee			d

Eine Abbildung $\varphi: A \rightarrow B$ zwischen zwei Ordnungsstrukturen (A, \ll) und (B, \lesssim) heißt

- isoton oder ordnungstreu, falls $\forall a_1, a_2 \in A: a_1 \ll a_2 \rightarrow \varphi(a_1) \lesssim \varphi(a_2)$,
- ähnlich, falls φ bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} isoton sind.

BOOLEsche Verbände sind genau dann ähnlich, wenn sie gleichviel Atome besitzen.