Topologische Strukturen

Eine topologische Struktur **(M, $\mathcal{U}$)** wird gebildet aus einer Menge **M** und einem Umgebungssystem $\mathcal{U}$, und jeder Punkt der Menge **M** besitzt selbst ein Umgebungssystem:

$\forall\, x \in \mathbf{M}\ \ \exists\, \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{M})$. ($\mathcal{P}$(**M**) ... Potenzmenge von **M**)

Umgebungssystem $\mathcal{U}$: $\varnothing \in \mathcal{U}$, $\mathbf{M} \in \mathcal{U}$ $\quad \mathbf{U} \in \mathcal{U} \wedge \mathbf{V} \in \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{V} \in \mathcal{U}$ $\quad \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \rightarrow \cup\, \{\, \mathbf{U} \mid \mathbf{U} \in \mathcal{V} \} \in \mathcal{U}$

Umgebungsaxiome für Umgebungen **U**⊆**M** eines Punktes $x \in$ **M**: $\quad \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \rightarrow x \in \mathbf{U}$

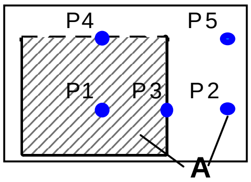
$\mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \wedge \mathbf{U} \subseteq \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \in \mathcal{U}(x)$ $\quad \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{U}(x) \rightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{V} \in \mathcal{U}(x)$ $\quad \mathbf{V} \subseteq \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \rightarrow \forall y \in \mathbf{V}\!: \mathbf{U} \in \mathcal{U}(y)$

Metrik d: $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \mapsto \mathbb{R}^*$: $\quad d(x, y) = d(y, x) \quad d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

ε-Umgebung: $\mathbf{U}_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\} \in \mathcal{U}(x)$ *(offenes 2ε-Intervall, offener ε-Kreis, offene ε-Kugel, ...)*

Ein Punkt $x \in$ **M** heißt bezüglich einer Menge **A** ⊆ **M** $\quad$ P1, P2, P3 ∈ **A**, P4, P5 ∉ **A**

- ⊙ <u>innerer Punkt</u> von **A**, falls $x \in \mathbf{A} \wedge \exists\, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \wedge \mathbf{U} \subseteq \mathbf{A}$ — P1
- ⊙ <u>isolierter Punkt</u> von **A**, falls $x \in \mathbf{A} \wedge \exists\, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \wedge (\mathbf{U} \setminus \{x\}) \cap \mathbf{A} = \varnothing$ — P2
- ⊙ <u>äußerer Punkt</u> von **A**, falls $x \notin \mathbf{A} \wedge \exists\, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \wedge \mathbf{U} \cap \mathbf{A} = \varnothing$ — P5
- ⊙ <u>Berührungspunkt</u> von **A**, falls $\forall\, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \rightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{A} \neq \varnothing$ — P1, P2, P3, P4
- ⊙ <u>Randpunkt</u> von **A**, falls $\forall\, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \rightarrow \mathbf{U} \cap \mathbf{A} \neq \varnothing \wedge \mathbf{U} \cap (\mathbf{M} \setminus \mathbf{A}) \neq \varnothing$ — P2, P3, P4
- ⊙ <u>Häufungspunkt</u> von **A**, falls x Berührungspunkt von $\mathbf{A} \setminus \{x\}$ — P1, P3, P4



Menge **A** heißt <u>dicht</u>, falls $\forall\, x \in \mathbf{A}$: falls $\forall\, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) \rightarrow (\mathbf{U} \setminus \{x\}) \cap \mathbf{A} \neq \varnothing$,
Menge **A** heißt <u>vollständig</u>, falls ∀ Häufungspunkte y von **A** $\rightarrow y \in \mathbf{A}$,
Menge **A** heißt <u>offen</u>, falls $\forall\, x \in \mathbf{A}$: x ist innerer Punkt von **A**,
Menge **A** heißt <u>abgeschlossen</u>, falls **M** \ **A** eine offene Menge ist.

int(**A**) offener Kern von **A**, Menge der inneren Punkte
cl(**A**) abgeschlossene Hülle von **A**, Menge der Berührungspunkte
∂**A** Rand von **A**, Menge der Randpunkte $\quad \mathrm{int}(\mathbf{A}) \cup \partial\mathbf{A} = \mathrm{cl}(\mathbf{A}) \quad \mathrm{int}(\mathbf{A}) \cap \partial\mathbf{A} = \varnothing$

$\mathbf{U}_k$ ...offen $\rightarrow \varnothing, \mathbf{M}, \cap\, \{\, \mathbf{U}_k \mid k = 1, 2, ..., n\}, \cup\, \{\, \mathbf{U}_k \mid k = 1, 2, ...\}$ ... offen
$\mathbf{U}_k$ ...abgeschlossen $\rightarrow \varnothing, \mathbf{M}, \cup\, \{\, \mathbf{U}_k \mid k = 1, 2, ..., n\}, \cap\, \{\, \mathbf{U}_k \mid k = 1, 2, ...\}$ ... abgeschlossen

---

Eine Abbildung φ: **A** ↦ **B** zwischen zwei topologischen Strukturen **(A, $\mathcal{U}$)** und **(B, $\mathcal{V}$)** heißt

- <u>stetig im Punkt</u> $x \in$ **A**, falls $\forall\, \mathbf{V} \in \mathcal{V}(\varphi(x))\ \exists\, \mathbf{U} \in \mathcal{U}(x) : \varphi(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{V}$,
- **stetig** oder <u>umgebungstreu</u>, falls φ stetig $\forall x \in \mathbf{A}$,
- **homöomorph** oder <u>topologisch</u>, falls φ bijektiv und sowohl φ als auch φ^{-1} stetig sind.

Stetige Abbildungen zusammenhängender Mengen erzeugen zusammenhängende Mengen.
Die stetige Abbildung $\varphi([0, 1])$ des Einheitsintervalls erzeugt einen Weg **W**, er heißt geschlossen für $\varphi(0)=\varphi(1)$.
Eine Menge **M** heißt wegzusammenhängend, falls $\forall\, x, y \in \mathbf{M}\ \ \exists\, \mathbf{W} :\ \varphi(0) = x\ \wedge\ \varphi(1) = y\ \wedge\ \mathbf{W} \subseteq \mathbf{M}$.
Zwei Mengen **A**, **B** heißen <u>separiert</u>, falls $\mathrm{cl}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{B} \neq \varnothing \wedge \mathrm{cl}(\mathbf{B}) \cap \mathbf{A} \neq \varnothing$, anderenfalls <u>zusammenhängend</u>.
Eine Menge **M** ist <u>zusammenhängend</u>, wenn sie nicht als Vereinigung zweier separierter Mengen **A**, **B** darstellbar ist. Offene wegzusammenhängende Mengen sind zusammenhängend.
Nichtzusammenhängende Mengen sind als Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten darstellbar.
Zerfällt für ein geeignetes ε>0 die Menge $\mathbf{U}_{2\varepsilon}(x) \setminus \mathbf{U}_\varepsilon(x)$ in k Zusammenhangskomponenten, so besitzt der Punkt $x \in$ **M** den <u>Grad</u> k : grad(x) = k. Bei Homöomorphien interessieren v.a. Punkte x mit grad(x) ≠ 2 .

	Dimension n :	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	...
zusammenhängende Mengen, einfachste topologische Figuren	n-dim. Quader	Punkt	Strecke	Rechteck	Quader	...
	n-dim. Simplex	Punkt	Strecke	Dreieck	Tetraeder	...
	n-dim. Kugel	Punkt	Strecke	Kreis	Kugel	...

Kurve (im engeren Sinne): zusammenhängend, beschränkt, abgeschlossen, 1-dimensional.
<u>Kurvenbogen</u> (homöomorphes Bild von **[**0, 1**]**), <u>Jordankurve</u> (stetiges Bild von **[**0, 1**]**, geschlossen),
<u>zusammengesetzte Kurven</u> (Kurven, die nur an Endpunkten zusammenstoßen, zusammenhängend).
Kurve (im weiteren Sinne): zusammenhängend, abgeschlossen, 1-dimensional (auch Gerade, unendl. Linien).
Figuren höherer Dimension: zusammenhängend, beschränkt, abgeschlossen, n-dimensional.
Der Rand einer topologischen n-dimensionalen Figur besteht aus Figuren niedriger Dimension.

Bsp.: $\mathbf{A}$ = Würfel (3-dim.), $\partial\mathbf{A} = \mathbf{S}_1 \cup ... \cup \mathbf{S}_6 = \mathbf{S}_1 \cup ... \cup \mathbf{S}_6 \cup \mathbf{K}_1 \cup ... \cup \mathbf{K}_{12} \cup \mathbf{E}_1 \cup ... \cup \mathbf{E}_8$,
das sind 6 Seitenquadrate (2-dim.), 12 Kanten (1-dim.) und 8 Ecken (0-dim.), der Rand jedes Seitenquadrats (2-dim.) wird von 4 Kanten (1-dim.) und 4 Ecken gebildet, usw.

<u>Triangulierung</u> eines n-dimensionalen Polyeders: Zerlegung in n-dimensionale Simplexe, diese in ihre Randsimplexe der Dimension n-1, usw. (für n=3: Polyeder => Tetraeder => Dreiecke => Kanten => Punkte).

Eine Menge oder topologische Figur heißt <u>n-fach zusammenhängend</u>, wenn es n-1 Schnitte (von Rand zu Rand) gibt, die die Figur nicht zerlegen, aber n Schnitte notwendiger Weise zum Zerfallen der Figur führen.