Zahlenbereiche - Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Peanosche Axiome (für natürliche Zahlen):

(A1) Null ist eine Zahl.

(A2) $\forall\, n : \exists\, n'$ — Jede Zahl n hat einen Nachfolger n'.

(A3) $\neg\exists\, n' = 0$ — 0 ist kein Nachfolger.

(A4) $m' = n' \;\rightarrow\; m = n$ — Keine Zahl ist Nachfolger verschiedener Zahlen.

(A5) $(P(0),\ \forall\, n : P(n) \rightarrow P(n')) \rightarrow \forall\, n : P(n)$. (Vollständ. Induktion).
Eine Beziehung gilt für alle Zahlen, wenn sie für **0** gilt <u>und</u>
wenn die Beziehung von n auf n' gefolgert werden kann.

Einführung und **Benennung** der natürlichen Zahlen als Nachfolger der **0**:

(D1) $0' = 1$, $(0')' = 1' = 2$, $((0')')' = 2' = 3$, usw. (explizite Definition)

Definition der **Addition** zweier natürlicher Zahlen: Summe $m + n$:

(D2) $n + 0 = n$ (Addition der Null)

(D3) $m + n' = (m + n)'$ (Addit. d. Nachfolgers)

Definition der **Multiplikation** zweier natürlicher Zahlen: Produkt $m * n$:

(D4) $n * 0 = 0$ (Multiplik. der Null)

(D5) $m * n' = m * n + m$ (Multipl. d. Nachfolg.)

Nachweis von Eigenschaften der natürlichen Zahlen mittels vollständiger Induktion:

Folgerung der Eigenschaften der Addition:

(D3)=> $n+1 = n+0' = (n+0)' = n'$ (Addition der Eins)

Aus $(k+m)+0 = k+m = k+(m+0)$

folgt $(k+m)+n = k+(m+n)$ (Assoziativität)

wegen $(k+m)+n' = ((k+m)+n)' = (k+(m+n))' = k+(m+n)' = k+(m+n')$.

Aus $0+0 = 0 = 0+0$ folgt $0+n = n+0 = n$

wegen $0+n' = (0+n)' = (n+0)' = n' = n'+0$, sowie

aus $1+0 = 1 = 0+1$ folgt $1+n = n+1 = n'$

wegen $1+n' = (1+n)' = (n+1)' = (n')' = n'+1$ und

damit $m+n = n+m$ (Kommutativität)

wegen $n+m' = (n+m)' = (m+n)' = m+n' = m+(n+1)$
$= m+(1+n) = (m+1)+n = m'+n$.

Folgerung der Eigenschaften der Multiplikation:

(D5)=> $m*1 = m*0' = m*0+m = 0+m = m$. (Multiplik. d. Eins)

Aus $(k+m)*0 = 0 = 0+0 = k*0+m*0$

folgt $(k+m)*n = k*n+m*n$ (Distributivität)

wegen $(k+m)*n' = (k+m)*n+(k+m) = (k*n+m*n)+(k+m)$
$= k*n+(m*n+(k+m)) = k*n+((m*n+k)+m) = k*n+((k+m*n)+m)$
$= k*n+(k+(m*n+m)) = (k*n+k)+(m*n+m) = k*n'+m*n'$.

Aus $0*0 = 0 = 0*0$ folgt $0*m = m*0 = 0$

wegen $0*m' = 0*m+0 = m*0+0 = 0+0 = 0 = m'*0$ und

damit $n*m = m*n$ (Kommutativität)

wegen $n'*m = (n+1)*m = n*m+1*m = m*n+m = m*n'$.
$= (m+1)+n = m'+n$.

Aus $(k*m)*0 = 0 = 0 + 0 = k*0+m*0$

folgt $(k*m)*n = k*(m*n)$ (Assoziativität)

wegen $(k*m)*n' = (k*m)*n+(k*m) = k*(m*n)+k*m$
$= (m*n)*k+m*k = (m*n+m)*k = (m*n')*k = k*(m*n')$.